

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

PHYSIK-DEPARTMENT



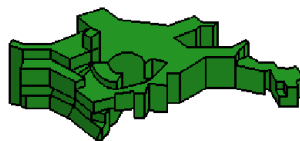
Allgemein Relativistischer Kollaps rotierender extrem massereicher Sterne in Achsensymmetrie

Diplomarbeit

von

Volker Heesen

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR ASTROPHYSIK



TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR ASTROPHYSIK

**Allgemein Relativistischer Kollaps
rotierender
extrem massereicher Sterne
in Achsensymmetrie**

Diplomarbeit

von

Volker Heesen

Angefertigt am
MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR ASTROPHYSIK
unter der Betreuung von
Dr. habil. Ewald Müller

Garching bei München, Juni 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Extrem massereiche Sterne	5
2.1	Extrem massereiche Sterne als 4/3-Polytrope	5
2.2	Polytrope in Newtonscher Gravitation	7
2.3	Stabilität	9
2.3.1	Stabilisierung sphärischer Modelle durch Gasdruck	9
2.3.2	Roche-Näherung	12
2.3.3	Post-Newtonsche Instabilität rotierender 4/3-Polytrope	14
2.3.4	Entwicklung bis zum Einsetzen der Instabilität	16
3	Theoretische Grundlagen und numerische Implementation	19
3.1	ADM- $\{3 + 1\}$ -Formalismus	19
3.1.1	Die konform flache Näherung (CFC)	21
3.2	Allgemein Relativistische Hydrodynamik	23
3.2.1	Lösung der Erhaltungsgleichungen	24
3.2.2	Approximative Riemannlöser	25
3.3	Metrikgleichungen	28
3.3.1	Isotrope Schwarzschildmetrik	28
3.3.2	Lösung der Metrikgleichungen mit Green-Funktion	31
3.3.3	Entartung der nicht-linearen Metrikgleichungen	34
3.3.4	Abgewandelte Green-Methode	35
3.4	Zustandsgleichung	38
3.4.1	Strahlungs- und Gasdruck	38
3.4.2	Elektron-Positron-Paare	39
3.4.3	Thermische Neutrino-Emission	40
3.4.4	Rückgewinnung der primitiven Variablen	40
3.4.5	Atmosphäre	41
3.5	Anfangsmodelle	42
3.5.1	Sphärische Modelle	42
3.5.2	Rotierende Modelle	43
4	Testrechnungen	45
4.1	Erhaltene Größen	45
4.2	Neutronensterne	51
4.2.1	Bestimmung der Stabilität	51
4.2.2	Migration instabiler Neutronensterne auf den stabilen Ast	53

5	Ergebnisse und Diskussion	57
5.1	Sphärischer Kollaps	57
5.1.1	Entwicklung während des Kollapses	57
5.1.2	Entstehung des Schwarzen Lochs	58
5.1.3	Neutrinoleuchtkraft	64
5.2	Kollaps einer rotierenden Konfiguration	67
5.3	Diskussion	73
5.3.1	Numerische Probleme bei Entstehung des Schwarzen Lochs	73
5.3.2	Vergleich mit lichtartiger Foliation der Raumzeit	74
6	Zusammenfassung	77
A	Hilfsgrößen	81
A.1	Ableitung einiger Zustandsgrößen	81
A.2	Ableitungs-Identität	82
	Literaturverzeichnis	83

Kapitel 1

Einleitung

Als Maarten Schmidt 1963 aus der Analyse des Spektrums des optischen Gegenstücks der Radioquelle 3C273 eine hohe Rotverschiebung feststellte, war eine neue Objektklasse, die *Quasare*, mit den höchsten Leuchtkräften im gesamten Universum gefunden. Die hohe Rotverschiebung lässt sich mit einer Entfernung von 950 Mpc innerhalb des expandierenden Universums erklären, woraus eine absolute (spektral integrierte) Leuchtkraft von 10^{15} Sonnenleuchtkräften folgt. Dies ist um einen Faktor 10^4 größer als die Leuchtkraft der Milchstraße. Quasare sind ihrerseits nur die leuchtkräftigste Unterklasse von Objekten, deren Eigenschaften man in dem Modell der *Aktiven Galaktischen Kerne* (AGN: *Active Galactic Nuclei*) erklären kann. Kernpunkt dieses Modells ist ein *extrem massereiches Schwarzes Loch* mit einer Masse von 10^6 bis einige $10^9 M_\odot$ (Sonnenmassen), das von einer heißen, rotierenden Gasscheibe, einer sogenannten Akkretionsscheibe, umgeben ist. Die enorme Energiefreisetzung der AGNs stammt aus der potentiellen Energie des in das Schwarze Loch einfallenden Gases. Eine wichtige Rolle spielt dabei die Rotation, denn je schneller das Schwarze Loch rotiert, desto größer ist die Effektivität der Energiefreisetzung. Elvis et al. [17] haben aus Beobachtungen des Röntgenhintergrundes durch Vergleich mit der spektralen Energieverteilung der Quasare geschlossen, dass der Anteil, der durch Akkretion freigesetzten Energie etwa 7% bis 15% der Leuchtkraft des Universums ausmacht. Bei der Kenntnis der Massendichte^a der Schwarzen Löcher lässt sich daraus auf eine hohe Effektivität der Akkretion schließen, woraus folgt, dass die meisten extrem massereichen Schwarzen Löcher schnell rotieren.

Die Existenz massereicher Schwarzer Löcher wird untermauert durch Beobachtungen der Bewegungen von Sternen im Zentrum naher Galaxien, welche auf massereiche dunkle Objekte schließen lassen [32]. In der Galaxie NGC 4258 ließ sich eine zentrale kompakte, dunkle Masse von $3,6 \times 10^7 M_\odot$ anhand der Maseremission der sie umgebenden Wasserstoffwolken nachweisen [42]. In Beobachtungen des Zentrums der Milchstraße wurde ein Stern identifiziert, der sich auf einem Keplerorbit mit einem Periastronabstand von nur 17 Lichtstunden um die Radioquelle Sagittarius A* bewegt. Um die daraus folgende dunkle Masse von $3,7 \times 10^6 M_\odot$ am Ort von Sagittarius A* zu erklären, bleiben aufgrund ihrer geringen Ausdehnung nahezu keine Alternativen zu einem extrem massereichen Schwarzen Loch [46].

^agemeint ist hier die Masse von mehreren Schwarzen Löchern zusammengekommen, dividiert durch das Raumvolumen, auf dem sie sich verteilen

Obwohl die Hinweise auf die Existenz extrem massereicher Schwarzer Löcher überzeugend sind, ist ihre Entstehung noch immer weitgehend unverstanden. Verschiedene Szenarien sind vorgeschlagen worden, einige davon gründen auf stellardynamischen Effekten, andere auf gasdynamischen Effekten, und noch andere auf eine Kombination daraus. Zur Zeit gibt es jedoch noch keine Beobachtungen, die eines dieser Szenarien bestätigen oder ausschließen. In einem der stellardynamischen Szenarien wird ein dichter Sternhaufen bestehend aus kompakten Sternen dynamisch instabil gegen kollisionsfreie radiale Moden und durchläuft einen Kollaps zu einem extrem massereichen Schwarzen Loch [49]. In einem alternativen Szenario werden massereiche, ausgedehnte Sterne in einem dichten Sternhaufen, durch Sternkollisionen gebildet, die in fortwährenden Kollisionen zu einem extrem massereichen Stern verschmelzen.

In einem typischen gas-dynamischen Szenario wird der extrem massereiche Stern durch die Kontraktion einer Gaswolke gebildet, die durch die Synthese von Wasserstoff und Helium nach dem Urknall entstanden ist (*primordiale Gaswolke*). Da die spezifische Entropie des extrem massereichen Sterns etwa 100-mal größer als die des intergalaktischen Gases ist, muss es einen effektiven Prozess geben, um die Entropie des intergalaktischen Gases zu erhöhen, z.B. durch Stoßwellen. Allerdings sind die Unklarheiten über den genauen Ablauf dieses Prozesses bisher noch nicht beseitigt. Wenn die Entropie nicht ausreichend erhöht wird, setzt eine Zerteilung der Wolke ein und es entstehen viele Sterne geringerer Masse (*Fragmentation*) oder, im Fall einer anfänglichen Rotation, eine flache Gasscheibe (*supermassive disk*) [37, 52]. Einmal entstanden, werden extrem massereiche Sterne nach einer Phase der Kontraktion instabil und der Kollaps zu einem Schwarzen Loch setzt ein, wie Chandrasekhar [7] durch die allgemeinrelativistische Analyse hydrodynamischer, radialer Schwingungen nachweisen konnte.

Diese Diskussion verdeutlicht, dass extrem massereiche Sterne als Vorläufermodell extrem massereicher Schwarzer Löcher ein Forschungsgebiet darstellen, dessen Verständnis für die Astrophysik weitreichende Konsequenzen hat. Hoyle & Fowler [26] versuchten 1963, die Radio-Emission von Quasaren durch extrem massereiche Sterne zu erklären. Auch wenn heute diese Erklärung nicht mehr akzeptiert wird, war es das erste Mal, dass extrem massereiche Sterne verwendet wurden, um astrophysikalische Fragestellungen zu beantworten. Appenzeller & Fricke unternahmen 1972 die ersten numerischen Untersuchungen des Kollapses sphärischer extrem massereicher Sterne. Sie fanden heraus, dass für Massen $> 10^6 M_\odot$ die *thermonukleare Energiefreisetzung* keinen Einfluss auf die Entwicklung während des Kollapses hat. Shapiro & Teukolsky [47] führten 1979 eine allgemeinrelativistische Simulation für einen Stern mit $10^6 M_\odot$ durch, wobei sie die Entstehung des Schwarzen Lochs so weit verfolgen konnten, bis ein Großteil der Masse den Horizont überschritten hatte. Fuller, Woosley & Weaver [21] untersuchten noch einmal die Fragestellung von Fricke & Appenzeller, allerdings mit verbesserten Kernreaktionsraten. Als Ergebnis fanden sie, dass nukleare Energiefreisetzung den Kollaps umkehren kann, wenn der Metallgehalt (Häufigkeit aller Elemente schwerer als Helium) genügend hoch ist. Linke et al. [36] untersuchten mit einem allgemeinrelativistischen Hydrodynamikprogramm die *Neutrinoemission* beim Kollaps sphärischer extrem massereicher Sterne und präsentierten Kurven der Neutrinoemission als Funktion der Zeit (Lichtkurven). Sie wiesen nach, dass die Neutrinoemission die Kollapsdynamik nicht beeinflusst. Linke verwendete eine *charakteristische Formulierung* der allgemeinrelativistischen Gleichungen, bei der die Raumzeit in lichtartige Hyperflächen (Lichtkegel) aufgeblättert wird. Eine Erweiterung dieses Formalismus auf zwei Dimensionen ist kürzlich veröffentlicht worden [51]. Ein Nachteil der charakteristischen Formu-

lierung ist, dass, von einem entfernten Beobachter aus gesehen, sich Lichtstrahlen schneiden können, d.h. Kaustiken auftreten können. Dann bricht der Formalismus zusammen. Eine Alternative stellt die Aufblätterung der Raumzeit in *raumartige Hyperflächen* dar, bei der auch in mehrdimensionalen Anwendungen keine Kaustiken auftreten.

Eine solche Formulierung der allgemeinrelativistischen Hydrodynamik liegt dem von Dimmelmeier entwickelten Hydrodynamikprogramm zugrunde [12]. Die Einsteinschen Feldgleichungen werden in *konform flacher Näherung* (CFC: conformal flatness condition) gelöst, was für sphärische Sterne sogar exakt ist und für rotierende Sterne eine gute Näherung darstellt. Durch die Eichbedingung der *größtmöglichen Aufblätterung* (maximal slicing) lässt sich die Bildung einer Singularität bei der Entstehung eines Schwarzen Lochs handhaben. Meine Aufgabe bestand darin, den Kollaps eines rotierenden extrem massereichen Sterns über einen möglichst langen Zeitraum zu simulieren, um die Entstehung des Schwarzen Lochs sowie die nachfolgende Akkretion verfolgen zu können. Durch die ansteigenden Temperaturen entstehen beim Kollaps *Elektron-Positron-Paare*, was den Druck aufgrund der für die Teilchenmassen aufgewendeten Energie etwas reduziert, d.h. die Zustandsgleichung weicher macht. Dieser mikrophysikalische Effekt wurde mit Hilfe einer geeigneten, tabellierten Zustandsgleichung berücksichtigt. Um eine Vergleichsgrundlage mit den Simulationen von Linke zu haben, wurden darüberhinaus Routinen zur Auswertung der Neutrinoemission auf der Basis von Näherungsformeln (Fittingformeln) bzw. Tabellen implementiert [25, 27, 41].

Die Diplomarbeit ist folgendermaßen aufgebaut: In Kapitel 2 erläutere ich die theoretischen Aspekte extrem massereicher Sterne, insbesondere im Hinblick auf ihre Stabilität. In Kapitel 3 führe ich die hydrodynamischen Gleichungen sowie die Metrikgleichungen ein, und erkläre kurz die Methoden zu ihrer Lösung. Die dabei aufgetretenen Schwierigkeiten werden diskutiert und eine Lösung vorgestellt. In Kapitel 4 stelle ich Methoden vor, wie man sich von der Richtigkeit der numerischen Ergebnisse überzeugen kann. Dazu erläutere ich ausserdem Ergebnisse von Testrechnungen, die mit den Ergebnissen anderer Autoren verglichen werden können. In Kapitel 5 präsentiere ich die Resultate der Simulationen eines sphärischen und eines rotierenden extrem massereichen Sterns. Im Anschluss diskutiere ich die Ergebnisse und die numerischen Schwierigkeiten. Schließlich findet sich in Kapitel 6 noch eine Zusammenfassung der Arbeit.

Konventionen: Es werden durchgehend geometrische Einheiten ($G = c = 1$) benutzt; ansonsten, wenn extra darauf hingewiesen wird, cgs-Einheiten. Es wird, wie in Viererschreibweise üblich, die Einsteinsche Summenkonvention benutzt, d.h. über gleichlautende Indizes wird summiert. Griechische Indizes laufen von 0 bis 3, lateinische von 1 bis 3. Der metrische Tensor der flachen Minkowski-Metrik hat die Diagonalelemente $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Vierervektoren v^μ heißen zeitartig für $v_\mu v^\mu < 0$ und raumartige für $v_\mu v^\mu > 0$.

Kapitel 2

Extrem massereiche Sterne

2.1 Extrem massereiche Sterne als 4/3-Polytrope

Extrem massereiche Sterne sind vor Einsetzen des Kollapses bis auf geringfügige Abweichungen in einem *hydrostatischen Gleichgewicht*. Für nichtrotierende Sterne wird die Gravitationskraft durch den Druckgradienten ausgeglichen:

$$\nabla P = -\rho \nabla \phi_{\text{grav}}, \quad (2.1)$$

mit dem Druck P und dem Newtonschen Gravitationspotential ϕ_{grav} . Der Druck wird aus der Summe von Strahlungsdruck P_s und Gasdruck P_g gebildet. Führt man das Verhältnis von Gasdruck und Gesamtdruck ein,

$$\beta = \frac{P_g}{P}, \quad (2.2)$$

dann ergibt sich der Druck zu:

$$P = P_g + P_s = \frac{\Re \rho T}{\mu} + \frac{1}{3} a T^4 = \frac{\Re}{\mu \beta} \rho T. \quad (2.3)$$

Hierbei ist T die Temperatur, a die Strahlungskonstante (mit $a = 4\sigma/c$, σ = Stefan-Boltzmann-Konstante, c = Vakuumlichtgeschwindigkeit), \Re die universelle Gaskonstante und μ das mittlere molekulare Elektronengewicht. Die Gaskonstante ist hierbei in der Dimension (Energie / Temperatur / Masse), weshalb das mittlere molekulare Elektronengewicht dimensionslos ist. Für vollständig ionisierten Wasserstoff erhält man $\mu = 1/2$, was ich in allen Simulationen benutzt habe. Der Druck ist also eine Funktion von Dichte und Temperatur $P = P(\rho, T)$. Wenn man eine Beziehung $\rho(T)$ zwischen Dichte- und Temperaturprofil findet, lässt sich der Druck durch eine Polytropengleichung darstellen:

$$P = K \rho^\Gamma. \quad (2.4)$$

Hierbei ist K die Polytropenkonstante und Γ der Polytropenexponent. Anstelle von Γ wird häufig in der Literatur auch der Polytropenindex n verwendet, mit $\Gamma = 1 + 1/n$. Um eine Bedingung $\rho(T)$ zu erhalten, genügt die Forderung einer *isentropen Sternstruktur*, mit einer

konstanten massenspezifischen Entropie s . Die massenspezifische Entropie ergibt sich aus der Integration des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik:

$$ds = \frac{1}{T} \left(d\epsilon - Pd \left(\frac{1}{\rho} \right) \right). \quad (2.5)$$

Mit der massenspezifischen Energiedichte der Strahlung $\epsilon_s = aT^4/\rho$ erhält man:

$$ds = \frac{4a}{\rho} T^2 dT - \frac{4a}{3\rho^2} T^3 = d \left(\frac{4aT^3}{3\rho} \right), \quad (2.6)$$

was durch Integration zu

$$s_s = \frac{4aT^3}{3\rho} \quad (2.7)$$

führt. Wie wir gleich sehen werden ist bei extrem massereichen Sternen der Anteil des Gasdrucks nahezu vernachlässigbar, daher wird die Entropie sehr gut durch die Entropie der Strahlung s_s angenähert. Falls $s_s = \text{konst.}$ gilt, folgt aus (2.7) die Beziehung $T^3 \propto \rho$, die eingesetzt in den Strahlungsdruck $P_s \propto \rho^{4/3}$ ergibt. Daher lassen sich extrem massereiche Sterne als 4/3-Polytrope beschreiben mit $\Gamma = 4/3$ bzw. $n = 3$. Um die Polytropenkonstante festzulegen gewinnt man zunächst aus (2.2) und (2.3) die Beziehung:

$$1 - \beta = \frac{P_s}{P} = \frac{aT^4}{3P}. \quad (2.8)$$

Wenn man (2.8) nach der Temperatur auflöst und diese in (2.3) einsetzt, erhält man die Zustandsgleichung einer 4/3-Polytrope mit der Polytropenkonstante:

$$K = \left(\frac{3\mathfrak{K}^4}{a} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1 - \beta}{\mu^4 \beta^4} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.9)$$

Gleichung (2.9) geht zurück auf A.S.Eddington, der sie für sein berühmtes *Standard-Modell* [16] erhalten hat. Er erkannte, dass man unter der Annahme $\beta = \text{konst.}$ im gesamten Stern die Sternaufbaugleichungen besonders einfach lösen kann. Wenn man die Gleichungen (2.24) und (2.9) miteinander kombiniert, erhält man die *biquadratische-Gleichung nach Eddington* [29]:

$$\frac{1 - \beta}{\mu^4 \beta^4} = 3,02 \times 10^{-3} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2. \quad (2.10)$$

Daraus folgt, dass je größer die Masse M ist, desto geringer ist der Anteil β des Gasdrucks. Für $\beta \approx 0$ erhält man aus (2.10) einen einfachen Ausdruck für den Anteil des Gasdrucks:

$$\mu\beta = 4,29 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.11)$$

Damit ergibt sich für $\mu = 0,5$ und $M = 10^6 M_\odot$ der Anteil des Gasdrucks zu $\beta = 8,58 \times 10^{-3}$. Der Druck wird daher fast vollständig durch den Strahlungsdruck erzeugt, während der Anteil des Gasdrucks vernachlässigbar klein ist. Es ist aus (2.11) sofort einsehbar, dass mit zunehmender Masse dieser Anteil immer kleiner wird.

Warum ist die Sternstruktur eines massereichen Sterns isentropisch? Für strahlungsdominierte Sterne gilt für den adiabatischen Temperaturgradienten $\nabla_{\text{ad}} = (\partial \ln T / \partial \ln P)_s \rightarrow 1/4$. Der lokale Temperaturgradient $\nabla = (\partial \ln T / \partial \ln P)$ und der adiabatische Temperaturgradient sind dann identisch ($\nabla = \nabla_{\text{ad}}$) [29]. Nach dem *Schwarzschildkriterium* [8, 29] ist eine Sternschicht gegen Konvektion stabil, wenn der Temperaturabfall in einer adiabatisch aufsteigenden Gasblase größer als der Temperaturabfall der Umgebungsmaterie ist, d.h. $\nabla < \nabla_{\text{ad}}$. Damit befinden sich extrem massereiche Sterne an der Grenze zur Konvektions-Instabilität.

Der Energiefluss im Sterninneren wird von Photonen getragen, deren Opazität durch die Streuung an freien Elektronen (*Thomsonstreuung*) gegeben ist. Bei Annahme eines hydrostatischen Gleichgewichts lässt sich nun zeigen, dass die zeitliche Ableitung des Entropiegradienten negativ ist [37]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla s < 0, \quad (2.12)$$

und damit wegen $s \propto T^3 / P^{3/4}$ der Temperaturgradient mit der Zeit größer wird. Deshalb setzt schließlich Konvektion ein. Da mit der Konvektion ein radialer Austausch von Energie einhergeht, wird das weitere Anwachsen des Entropiegradienten verhindert. Es stellt sich also ein Gleichgewicht ein: Die Konvektion ist gerade so groß, dass ($\nabla = \nabla_{\text{ad}}$) gilt. Daher sind extrem massereiche Sterne voll konvektiv mit nahezu konstanter spezifischer Entropie. Wegen

$$\beta = \frac{1}{\frac{\mu a}{3\mathcal{R}} \frac{T^3}{\rho} + 1} \quad (2.13)$$

lässt sich durch die Vorgabe der spezifischen Entropie s der Anteil des Gasdrucks β festlegen und damit auch die Polytropenkonstante K . Diese drei Größen lassen sich schließlich durch die Masse M parametrisieren: K erhält man aus (2.24), β erhält man aus (2.11) und die Entropie bei Vernachlässigung des Gasanteils wird folgendermaßen durch die Masse parametrisiert [48]:

$$\frac{s}{k_{\text{B}}} = 0,942 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.14)$$

mit der Boltzmannkonstante k_{B} .

2.2 Polytrope in Newtonscher Gravitation

Man setzt die Polytropengleichung (2.4) in die Poisson-Gleichung $\Delta \phi_{\text{grav}} = 4\pi\rho$ für das Gravitationspotential ein. Falls man noch sphärische Symmetrie und hydrostatisches Gleichgewicht (2.1) voraussetzt, erhält man:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi\rho. \quad (2.15)$$

Transformation auf dimensionslose Variablen ($\rho_z = \text{Zentraldichte}$)

$$\rho = \rho_z \theta^n, \quad r = \mathcal{A} \xi, \quad \mathcal{A} = \left[\frac{(n+1)K\rho_z^{1/n-1}}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

liefert die *Lane-Emden-Gleichung* :

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{1}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = \Delta_\xi \theta = -\theta^n. \quad (2.17)$$

Zur Diskussion dieser Gleichung siehe Kapitel 3.3 in [48] und Kapitel 19 in [29]. Da nur Lösungen interessant sind, die im Zentrum regulär sind, fordert man die Randbedingungen:

$$\theta(0) = 1, \quad \theta'(0) = 0. \quad (2.18)$$

Als Lösung erhält man durch Integration von $r = 0$ aus eine Funktion $\theta(\xi)$ und damit auch $\rho(r)$. Analytische Lösungen existieren nur für $n \in \{0, 1, 5\}$. Durch die dimensionslose Formulierung ist die Lösung auf die Zentraldichte normiert. Damit bleiben als freie Parameter nur noch der Polytropenindex n und die Polytropenkonstante K übrig. Der Sternradius R folgt aus $\rho(R) = 0$, also $\theta(\xi_1) = 0$. Einen endlichen Radius erhält man nur für $n < 5$. Für den uns interessierenden Fall $n = 3$ folgt:

$$\xi_1 = 6,89685, \quad \xi_1^2 |\theta'(\xi)| = 2,01824, \quad (2.19)$$

und

$$R = a\xi_1 = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \rho_z^{\frac{1-n}{2n}} \xi_1. \quad (2.20)$$

Obwohl es im allgemeinen keine analytische Lösung gibt, kann die Masse gemäß

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr = 4\pi a^3 \rho_z \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n d\xi \quad (2.21)$$

bestimmt werden. Nach Einsetzen der Lane-Emden-Gleichung ergibt sich:

$$M = -4\pi a^3 \rho_z \int_0^{\xi_1} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\xi = 4\pi \mathcal{A}^3 \rho_z \xi^2 |\theta'(\xi_1)|, \quad (2.22)$$

bzw.

$$M = 4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi} \right]^{\frac{3}{2}} \rho_z^{\frac{3-n}{2n}} \xi^2 |\theta'(\xi_1)|. \quad (2.23)$$

Die Masse hängt für $n = 3$ weder von der Zentraldichte noch vom Radius ab. Sie ist alleine durch die Polytropenkonstante K festgelegt, d.h. K ist andererseits nur durch die Masse bestimmt (cgs):

$$K = 3,83 \times 10^{14} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{\frac{2}{3}} \left[\frac{\text{cm}^3}{\text{g}^{1/3} \text{ s}^2} \right]. \quad (2.24)$$

Die Gesamtenergie E einer Polytrope ist die Summe aus innerer Energie E_i (Integral über die massenspezifische innere Energie ϵ) und gravitativer Bindungsenergie $|W|$:

$$E = E_i + |W|, \quad E_i = \int \epsilon dm, \quad |W| = - \int \frac{m}{r} dm. \quad (2.25)$$

Aus dem *Virialtheorem* [29] folgt $E_{\text{grav}} = -3(\Gamma - 1)E_i$, und damit erhält man für die Gesamtenergie:

$$E = -\frac{3\Gamma - 4}{3(\Gamma - 1)} |W|. \quad (2.26)$$

Für die gravitative Bindungsenergie gilt folgende Identität [48]:

$$|W| = \frac{3}{5-n} \frac{M}{|R|}. \quad (2.27)$$

Für $\Gamma = 4/3$ ist die Gesamtenergie Null, unabhängig von Zentralsdichte und Radius. Man kann also ohne Aufwendung von Energie Newtonsche 4/3-Polytrope expandieren oder kontrahieren; die Gesamtenergie legt keine Längenskala fest. Diese Eigenschaft der 4/3-Polytrope hat wichtige Konsequenzen für die Stabilität extrem massereicher Sterne (Abschnitt 2.3).

2.3 Stabilität

2.3.1 Stabilisierung sphärischer Modelle durch Gasdruck

Für nichtrotierende extrem massereiche Sterne bestimmt allein der Gasdruck die Stabilität, wie ich in diesem Abschnitt zeigen werde. Für rotierende Konfigurationen, wird die Stabilität dagegen vom Gasdruck nicht beeinflusst, wie wir in Abschnitt 2.3.3 sehen werden. Für beide Fälle kann die Untersuchung der Stabilität mit einer Variationsmethode durchgeführt werden, bei der man die Variation der Gesamtenergie als Funktion der Dichte untersucht (siehe z.B. [55]). Betrachtet wird dabei ein Stern mit einer Dichte ρ und ein Nachbarmodell mit einer leicht abweichenden Dichte $\rho + \delta\rho$. Die Entropie s und die Newtonsche Masse M bleiben dabei konstant. Deswegen muss auch die Polytropenkonstante K festgehalten werden, denn durch Vorgabe von s legt man K fest, wie ich im Abschnitt 2.1 erläutert habe. Da K kein freier Parameter ist, lässt sich der extrem massereiche Stern nicht mehr durch eine exakte 4/3-Polytrope beschreiben. Anstelle des Polytropenexponenten Γ muss man den lokalen adiabatischen Exponenten

$$\Gamma_1 = \left. \frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right|_s \quad (2.28)$$

verwenden. Wenn der Druck durch Strahlungs- und Gasdruck erzeugt wird, gilt:

$$\Gamma_1 = \frac{32 - 24\beta - 3\beta^2}{24 - 21\beta} = \frac{4}{3} + \frac{\beta}{6} + \mathcal{O}(\beta^2). \quad (2.29)$$

Für $\beta \rightarrow 0$ gilt $\Gamma_1 = 4/3$ (Photonengas), für $\beta \rightarrow 1$ gilt $\Gamma_1 = 5/3$ (ideales nichtrelativistisches Gas). Durch den Anteil des Gasdrucks, wenn er auch klein ist, ist der adiabatische Index also immer geringfügig größer als 4/3.

Für die Variation der Gesamtenergie E nach der Dichte ρ wird die Funktion $E(\rho)$ benötigt. Bei Vernachlässigung relativistischer Korrekturen lässt sich die Gesamtenergie schreiben als Summe von innerer Energie und gravitativer Bindungsenergie:

$$E = \int \epsilon dm - \int \frac{m}{r} dm. \quad (2.30)$$

Die Zustandsgleichung für ein ideales Gas $P = (\Gamma_1 - 1)\rho\epsilon$ wird in das Integral über die innere Energiedichte eingesetzt. Mit Hilfe der Gleichungen (2.20) und (2.23) kann der Radius durch

die massengemittelte Dichte $\bar{\rho}$ mit $R \propto (M/\bar{\rho})^{1/3}$ ersetzt werden. Damit folgt:

$$E(\bar{\rho}) = K_1 \bar{\rho}^{\Gamma_1-1} M - K_2 \bar{\rho}^{1/3} M^{5/3}. \quad (2.31)$$

K_1 und K_2 sind Konstanten, falls die Entropie festgehalten wird. Für $\Gamma_1 = 4/3$ folgt das schon bekannte Resultat, dass die Gesamtenergie unabhängig von der Dichte ist (2.26). Damit ist der Stern für jede Dichte $\bar{\rho}$ in einem indifferenten Gleichgewicht. Für $\Gamma_1 > 4/3$ hat $E(\bar{\rho})$ ein Minimum, bei dem sich ein stabiles Gleichgewicht des Sterns befindet. Für $\Gamma_1 < 4/3$ hat $E(\bar{\rho})$ dagegen ein Maximum, was einem instabilen Gleichgewicht entspricht. Nun lässt sich für ein Gleichgewichtsmodell eine Beziehung zwischen der Masse und der Dichte aufstellen. Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \bar{\rho}} \right|_{M,s} = 0 \quad (2.32)$$

erhält man für ein Gleichgewichtsmodell die Masse in Abhängigkeit von der Dichte:

$$M \propto \bar{\rho}^{(\Gamma_1-4/3)(3/2)}. \quad (2.33)$$

Das Vorzeichen von $\partial M/\partial \bar{\rho}$ für ein Gleichgewichtsmodell entspricht damit dem Vorzeichen von $\Gamma_1 - \frac{4}{3}$. Damit sind Sterne mit $\partial M/\partial \bar{\rho} > 0$ stabil, Sterne mit $\partial M/\partial \bar{\rho} < 0$ hingegen instabil. Bei genauerer Analyse gilt das insbesondere nicht nur für die massengemittelte Dichte $\bar{\rho}$, sondern auch für die Zentraldichte ρ_z . Durch den Anteil des Gasdrucks wären extrem massereiche Sterne also immer stabil. Da allerdings der adiabatische Index nur wenig größer als $4/3$ ist, befinden sich extrem massereiche Sterne an der Grenze zur Instabilität. Schon kleine Effekte können daher die Stabilität beeinflussen.

Die Folgerungen aus Gleichung (2.33) sind übrigens bekannter für den Fall von *Weißten Zwergen*, den sehr kompakten Überbleibseln kollabierter Sterne, die hauptsächlich durch den Fermi-Druck ihrer Elektronen stabilisiert werden, mit einem Adiabatenindex von $4/3 < \Gamma_1 < 5/3$. Mit zunehmender Masse wächst die zentrale und mittlere Dichte des Sterns und die Fermienergie der Elektronen steigt an, bis sie relativistisch werden, woraus $\Gamma_1 \rightarrow 4/3$ folgt. Daher ist die Masse schließlich nahezu unabhängig von der Zentraldichte und bei weiterer (geringer) Massenzunahme steigt die Zentraldichte so stark an, dass der Fermi-Druck der Gravitation nicht mehr standhalten kann. Der weiße Zwerg kollabiert zu einem Neutronenstern. Die Masse, die durch Anwachsen der Zentraldichte nicht überschritten werden kann, ist die berühmte *Chandrasekarsche Grenzmasse*.

Wie verändert nun die allgemeine Relativitätstheorie das Bild? Da extrem massereiche Sterne sich gut durch Newtonsche Gravitation beschreiben lassen, genügt das Einbeziehen einer post-Newtonschen Korrektur E_{PN} in die Energiegleichung, die aber für die Stabilität eine entscheidende Rolle spielt. Für $\Gamma_1 \approx 4/3$ erhält man als Summe aus innerer Energie, gravitativer Bindungsenergie und postnewtonscher Korrektur (Gleichung 6.10.29 in [48]):

$$E = \alpha M \rho_z^{\Gamma-1} - k_2 M^{5/3} \rho_z^{1/3} - k_4 M^{7/3} \rho_z^{2/3}, \quad (2.34)$$

mit $k_2 = 0,639001$ und $k_4 = 0,918294$. Die post-Newtonsche Korrektur erhöht also die Bindungsenergie des Sterns. Mit Einführung von $x = \rho_z^{1/3}$ erhält man:

$$E = \alpha M x^{3(\Gamma-1)} - k_2 M^{5/3} x - k_4 M^{7/3} x^2. \quad (2.35)$$

Die Ableitung nach x ergibt:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 3\alpha M x^{3(\Gamma-4/3)} - k_2 M^{5/3} - 2x k_4 M^{7/3}. \quad (2.36)$$

Um die Konstante α zu bestimmen, wird die Gleichgewichtsbedingung $\partial E/\partial x = 0$ genutzt. Bei Vernachlässigung der post-Newtonschen Korrektur folgt mit $\Gamma = 4/3$ die Konstante zu $\alpha = k_2 M^{2/3}$. Modelle mit $\partial^2 E/\partial x^2 > 0$ sind stabil, denn sie befinden sich in einem Minimum der Gesamtenergie. Für $\partial^2 E/\partial x^2 < 0$ sind die Modelle dagegen in einem Maximum der Gesamtenergie und damit in einem labilen Gleichgewicht. Der kritische Punkt, der die Grenze zwischen den stabilen und den instabilen Modellen darstellt, ist für $\partial^2 E/\partial x^2 = 0$ erreicht. Mit Einsetzen von α erhält man:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 3k_2(\Gamma - 4/3)M^{5/3}x^{-1} - 2k_4 M^{7/3} = 0. \quad (2.37)$$

Auflösen nach dem Adiabatenexponenten und Einsetzen von x ergibt:

$$\Gamma - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \frac{k_4}{k_2} M^{2/3} \rho_z^{1/3} = \frac{1}{3} \frac{k_4}{k_2} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\xi_1^2 |\Theta(\xi_1)|} \right)^{1/3} \xi_1 \left(\frac{2M}{R} \right), \quad (2.38)$$

wobei der Radius mit Hilfe der Gleichungen (2.20) und (2.23) eingeführt wurde. Einsetzen der numerischen Faktoren liefert schließlich den kritischen Adiabatenexponenten zu:

$$\Gamma_{\text{krit}} = \frac{4}{3} + 1,12 \left(\frac{2M}{R} \right). \quad (2.39)$$

Die post-Newtonsche Korrektur bewirkt also, dass der Adiabatenexponent etwas über dem Wert von $4/3$ liegen muss, um die Stabilität zu gewährleisten. Das gleiche Ergebnis erhält man aus der Analyse der Normalmoden adiabatischer radialer Schwingungen [48]. Für $\Gamma_1 > \Gamma_{\text{krit}}$ werden radiale Schwingungen gedämpft, der Stern ist stabil. Für $\Gamma_1 < \Gamma_{\text{krit}}$ wachsen radiale Schwingungen exponentiell an, der Stern ist damit instabil. Wenn man Γ_{krit} in die Näherung für den adiabatischen Index (2.29) einsetzt, ergibt sich ein dazugehöriges β und mit Hilfe von (2.9) das zugehörige K . Mit (2.20) erhält man schließlich einen kritischen Radius:

$$R_{\text{krit}} = \frac{6,8}{\beta} (2M), \quad (2.40)$$

der beim Einsetzen der gravitativen Instabilität unterschritten wird. Der Schwarzschildradius der Masse M ist $\hat{r}_s = 2M$. Da $\beta \ll 1$ gilt, ist der kritische Radius beim Einsetzen der Instabilität erheblich größer als der Schwarzschildradius. Einsetzen des Radius aus (2.20) und β aus (2.11) mit einem Schwarzschildradius von $\hat{r}_s \approx 3 \times 10^5 \text{ cm}(M/M_\odot)$ liefert die kritische Dichte abhängig von der Masse [48]:

$$\rho_{\text{krit}} = 1,994 \times 10^{18} \left(\frac{0,5}{\mu} \right)^3 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-\frac{7}{2}} [\text{g cm}^{-3}] \quad (2.41)$$

Durch Einsetzen von β aus (2.11) lässt sich der kritische Radius durch die Masse parametrisieren:

$$R_{\text{krit}} = 1,59\mu \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{\frac{1}{2}} (2M). \quad (2.42)$$

Für $\mu = 0,5$ und $M = 10^5 M_\odot$ ist $R_{\text{krit}} = 251 \times \hat{r}_s$, also hat ein extrem massereicher Stern beim Einsetzen der Instabilität einen Radius, der den Schwarzschildradius um ein Vielfaches übertrifft. Bei zunehmender Masse wird der kritische Radius im Verhältnis zum Schwarzschildradius noch größer. Daher kann man extrem massereiche Sterne vor dem Einsetzen der Instabilität sehr gut durch Newtonsche Gravitation beschreiben, obwohl die post-Newtonschen Korrekturen die Instabilität erzeugen. Die spezifische Entropie $s \propto T^3/\rho$ legt die Temperatur fest. Daraus erhält man die Zentraltemperatur beim Einsetzen der Instabilität zu [48]:

$$T_{\text{krit}} = 2,49 \times 10^{13} \left(\frac{M_\odot}{M} \right) [\text{K}], \quad (2.43)$$

wobei $\mu = 0,5$ angenommen wurde. Der Wert der Temperatur ist wichtig für die Frage, ob nicht auch das Erzeugen von Elektron-Positron-Paaren eine Instabilität erzeugen kann. Bei fester Entropie sorgt nämlich die Erzeugung der Paare für ein Absinken der inneren Energie, da sie in die Ruhemasse der Paare umgewandelt wird, was zu einem Absinken des Adiabatenexponenten führt. Die Paare bilden sich wegen des hochenergetischen Ausläufers der *Maxwellverteilung* schon bei 5×10^8 K, obwohl die Elektronenruhemasse einer zehn mal größeren Energie entspricht: $m_e c^2/k_B = 6 \times 10^9$ K. Aus (2.43) ergibt sich aber, dass solche Temperaturen nur für Sterne mit $M < 5 \times 10^4 M_\odot$ erreicht werden. Daher kann man die Paarinstabilität für nichtrotierende extrem massereiche Sterne vernachlässigen (gleiches gilt auch rotierende Sterne, Abschnitt 2.3.3). Man kann auch sagen: Die gravitative Instabilität setzt ein, bevor Paarbildung überhaupt eine Rolle spielt. Die zugehörige Gleichgewichtsenergie beim Einsetzen der Instabilität E_{krit} ist unabhängig von der Masse [48]:

$$E_{\text{krit}} = -3,583 \times 10^{54} [\text{erg}]. \quad (2.44)$$

2.3.2 Roche-Näherung

Eine andere Möglichkeit als durch Gasdruck extrem massereiche Sterne zu stabilisieren ist Rotation. Falls die primordiale Wolke, aus der extrem massereiche Sterne entstehen (Abschnitt 2.3.4), einen Drehimpuls hatte, führt das zur Rotation des sich bildenden Sterns. Durch Abstrahlung sinkt die Gesamtenergie des Sterns und er kontrahiert. Das führt zur Erhöhung der Rotationsgeschwindigkeit, denn der Drehimpuls bleibt zunächst während der Kontraktion erhalten. Entscheidend ist die maximale Rotationsgeschwindigkeit am Äquator, denn falls sie zu groß wird, setzt dort Massenverlust ein.

Ich werde gleich zeigen, dass die Annahme einer gleichförmigen Rotation zu einem festen Verhältnis von polaren Radius R_p zu äquatorialen Radius R_a führt. Die Annahme einer gleichförmigen Rotation kann dabei durch Magnetfelder und Konvektion hervorgerufenene turbulente Viskosität begründet werden [52]. Wie ich weiter unten begründen werde, ist der Einfluss des Gasdrucks auf die Stabilität rotierender extrem massereicher Sterne vernachlässigbar. Deswegen beziehen sich in diesem Abschnitt alle Überlegungen auf 4/3-Polytrope, bzw. $n = 3$. Um rotierende 4/3-Polytrope im Gleichgewicht zu untersuchen, wird nun die *Roche-Näherung* eingeführt [48, 55]. Hierbei wird die Eigengravitation der ausgedehnten Hülle vernachlässigt, was bei 4/3-Polytropen gerechtfertigt ist, denn bei Ihnen gilt für das Verhältnis von Zentraldichte zu mittlerer Dichte $\rho_z/\bar{\rho} = 54,2$. In dieser Näherung ist das Gravitationspotential in der Hülle

$\phi_{\text{grav}} = -M/r$. Das zur Zentrifugalkraft gehörende Potential ist dann $\phi_z = -1/2\Omega^2 r^2 \sin^2 \theta$, mit der Winkelgeschwindigkeit Ω , und θ ist der Winkel zwischen Radiusvektor und Rotationsachse. Damit erhält man anstelle der Gleichung (2.1) für das hydrostatische Gleichgewicht nun:

$$\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla(\phi_{\text{grav}} + \phi_z) = 0. \quad (2.45)$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

$$h + \phi_{\text{grav}} + \phi_z = \mathcal{K}, \quad (2.46)$$

mit der massenspezifischen Enthalpie:

$$h = \int \frac{dP}{\rho} = \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{P}{\rho} \propto \rho^{1/n}. \quad (2.47)$$

Die Integrationskonstante wird durch die Randbedingung $h(R_p) = 0$, festgelegt zu $\mathcal{K} = -M/R_p$, mit dem polaren Radius R_p . Das effektive Potential $\phi_{\text{eff}} = \phi_{\text{grav}} + \phi_z$ hat entlang des Äquators ein Maximum bei $r_{\text{max}} = (M/\Omega^2)^{1/3}$ mit einem Wert $\phi_{\text{max}} = -3M/(2r_{\text{max}})$. Da die für die spezifische Enthalpie $h = \mathcal{K} - \phi_{\text{eff}}$ gilt, und für den Äquatorradius R_a an der Sternoberfläche $h(R_a) = 0$ erfüllt ist, ist das maximal mögliche \mathcal{K} durch $\mathcal{K} = \phi_{\text{max}}$ gegeben, mit $R_a = r_{\text{max}}$. Daraus lässt sich das maximal mögliche Verhältnis von äquatorialen zu polaren Radius bestimmen:

$$\left(\frac{R_a}{R_p} \right)_{\text{max}} = \frac{3}{2}. \quad (2.48)$$

Aus $R_a = (M/\Omega_{\text{max}}^2)^{1/3}$ lässt sich die maximale Winkelgeschwindigkeit Ω_{max} ableiten:

$$\Omega_{\text{max}} = \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{M}{R^3} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.49)$$

Um das Verhältnis von kinetischer Rotationsenergie T zur gravitativen Bindungsenergie $|W|$ zu erhalten, bestimmt man das Verhältnis $T/|W|$ für einen sphärischen Körper und berücksichtigt dann die Ausdehnung des Äquators. Für die kinetische Rotationsenergie gilt:

$$T = \frac{1}{2} I \Omega^2, \quad (2.50)$$

mit dem Trägheitsmoment:

$$I = \frac{2}{3} M \langle r^2 \rangle = \frac{2}{3} \int_0^M r^2 dm. \quad (2.51)$$

Hierbei ist $\langle r^2 \rangle = 0,11303 \times R_p^2$, woraus man sieht das der Beitrag der ausgedehnten Hülle zum Trägheitsmoment klein ist. Mit der gravitativen Bindungsenergie $|W|$ einer sphärischen ($n = 3$)-Polytrope (2.27) erhält man nun:

$$\frac{T}{|W|} = \frac{\frac{1}{2} \frac{2}{3} M \langle r^2 \rangle \Omega_{\text{max}}^2}{\frac{3}{2} M^2 / R_p} = 0,00744. \quad (2.52)$$

Die Abflachung der rotierenden Konfiguration bewirkt hauptsächlich eine geringere Winkelgeschwindigkeit, während der Großteil der Masse und damit auch des Trägheitsmoments im Inneren der Polytrope unverändert bleibt. Man beachte, dass der Wert von $T/|W|$ in (2.52) für maximal rotierende 4/3-Polytrope unabhängig von Masse, Radius und Winkelgeschwindigkeit ist. Wie wir gleich sehen werden ist dieser Wert für numerische Modelle, bei denen die Eigengravitation der Hülle mit berechnet wird, etwas größer.

2.3.3 Post-Newtonsche Instabilität rotierender 4/3-Polytrope

Um die Stabilität rotierender Konfigurationen zu untersuchen, wird wieder die Variationsmethode wie bei den nichtrotierenden Konfigurationen benutzt. Ich folge ab hier der Diskussion von Baumgarte und Shapiro [3], die die Entwicklung gleichförmig rotierender extrem masse-reicher Sterne bis zum Einsetzen der Instabilität verfolgt haben. Für einen Vergleich beachte man, dass sie dimensionslose Einheiten benutzt haben, mit $\bar{M} = K^{-3/2}M$ und $\bar{\rho} = K^3\rho$. Die Polytropenkonstante in geometrischen Einheiten ist $K = 1,01 \times 10^3 (M/M_\odot)^{2/3} [\text{cm}^{2/3}]$, die sich aus der Masse (2.23) ableitet. Die Gesamtenergie der nichtrotierenden 4/3-Polytrope (2.34) wird erweitert zu:

$$E = k_1 K M \rho_z^{1/3} - k_2 M^{5/3} \rho_z^{1/3} + k_3 j^2 M^{7/3} \rho_z^{2/3} - k_4 M^{7/3} \rho_z^{2/3} - k_5 M^3 \rho_z, \quad (2.53)$$

mit der Größe $j = J/M^2$. Die numerischen Faktoren ergeben sich zu: $k_1 = 1,7558$, $k_3 = 1,2041$ und $k_5 = 0,331211$; für k_2 und k_4 siehe Gleichung (2.34). Der Term mit k_1 entspricht dabei der inneren Energie, der mit k_2 der gravitativen Bindungsenergie, der mit k_3 der Rotationsenergie, der mit k_4 der postnewtonschen Korrektur E_{PN} und der mit k_5 der post-post-Newtonschen Korrektur E_{PPN} . Abweichungen von der sphärischen Form können vernachlässigt werden, da die Korrekturen mit $T/|W|$ skalieren, das nach (2.52) sehr klein ist. Da die Rotationsenergie und E_{PN} gleicherart mit der Zentralsdichte skalieren ($\propto \rho_z^{2/3}$), ist E_{PPN} entscheidend für die Bestimmung der Stabilität. Die Gleichgewichtsbedingung erhält man wieder aus $\partial E/\partial x = 0$, mit $x = \rho_z^{1/3}$. Aus der Bedingung für den kritischen Punkt $\partial^2 E/\partial x^2 = 0$ folgt:

$$\rho_z^{1/3} = x = \frac{k_3 j^2 - k_4}{3k_5 M^{2/3}}. \quad (2.54)$$

Da offensichtlich $\rho_z > 0$ gelten muss, erhält man als untere Grenze für den Drehimpuls:

$$j \geq j_{\min} = \left(\frac{k_4}{k_3} \right)^{1/2} = 0,8733. \quad (2.55)$$

Man beachte, dass Modelle mit $j = j_{\min}$ die Dichte $\rho_z = 0$ besitzen. An dieser Stelle ist die Näherung zu bemerken, dass der Gasdruck vernachlässigt wird. Denn wie wir in Abschnitt 2.3.1 gesehen haben, gibt es auch stabile Modelle ohne Drehimpuls ($j = 0$), wenn der Adiabatenexponent einen kritischen Wert überschreitet. Da für maximal rotierende Modelle, wie wir gleich sehen werden, die Rotation erheblich effektiver die Stabilität beeinflusst, d.h. die Konfigurationen am kritischen Punkt deutlich kompakter sind als durch Gasdruck stabilisierte Modelle, ist die Vernachlässigung des Gasdrucks dennoch gerechtfertigt. Die maximale Winkelgeschwindigkeit wird für maximal rotierende Modelle mit dem durch (2.52) gegebenen Wert von $T/|W|$ erreicht. Letzterer lässt sich mit Hilfe von (2.53) auch in der Form

$$\frac{T}{|W|} = \frac{k_3 j^2 M^{2/3} \rho_z^{1/3}}{k_2} \quad (2.56)$$

schreiben. Setzt man hierin die Dichte aus (2.54) ein, so erhält man eine quadratische Gleichung für j^2 :

$$j^4 - \frac{k_4}{k_3} j^2 - 3 \frac{k_2 k_5}{k_3^2} \frac{T}{|W|} = 0. \quad (2.57)$$

$\left(\frac{R_p}{R_a}\right)_{\text{krit}}$	$\left(\frac{T}{ W }\right)_{\text{krit}}$	$\left(\frac{J}{M^2}\right)_{\text{krit}}$	$\left(\frac{R_p}{M}\right)_{\text{krit}}$
0,664	$8,99 \times 10^{-3}$	0,97	427

Tabelle 2.1: *Dimensionslose Parameter eines gleichförmig rotierenden, extrem massereichen Sterns beim Einsetzen der Instabilität abgeleitet aus allgemeinrelativistischen Gleichgewichtsmodellen [3]. Man beachte, dass sie nicht von Masse, Drehimpuls und Radius oder der Entwicklung bis zum kritischen Punkt abhängen.*

Aus der einzigen Lösung mit $j^2 > 0$ ergibt sich schließlich näherungsweise (auf erste Ordnung von $T/|W|$ genau):

$$j_{\text{krit}} = 0,8757. \quad (2.58)$$

Die zugehörige Masse am kritischen Punkt M_{krit} , deren Herleitung ich überspringen möchte, ergibt sich durch das Einsetzen von j_{krit} in die Gleichgewichtsbedingung $\partial E/\partial x = 0$. Sie weicht nur unwesentlich von der Masse M einer nichtrotierenden 4/3-Polytrope (2.23) ab, was auf den kleinen Wert von $T/|W|$ zurückzuführen ist:

$$M_{\text{krit}} = (1 + 6,6 \times 10^{-5})M. \quad (2.59)$$

Die Masse und der Drehimpuls am kritischen Punkt eingesetzt in (2.54) liefert die kritische Dichte zu $\bar{\rho}_{\text{krit}} = 6,6 \times 10^{-9} K^{-3}$. Die Umwandlung in cgs-Einheiten ergibt:

$$\rho_{\text{krit}} = 8,6 \times 10^{10} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-2} [\text{g cm}^{-3}]. \quad (2.60)$$

Um zu klären, wie viel größer die kritische Konfiguration als der Schwarzschildradius ist, schreibt man Gleichung (2.56) um und setzt den Radius R_p ein (wie in Gleichung (2.38)):

$$\left(\frac{R_p}{M}\right)_{\text{krit}} = \left(\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\xi_1^2 |\theta(\xi_1)|}\right)^{1/3} \xi_1 \left(\frac{T}{|W|}\right)^{-1} \frac{k_3 j_{\text{krit}}^2}{k_2} = 456, \quad (2.61)$$

wobei Abweichungen von der Kugelgestalt vernachlässigt wurden. Beim Einsetzen der Instabilität haben also die rotierenden Modelle einen Polradius von $R_p = 465 \times r_s$. Für $M > 10^5 M_{\odot}$ ist der kritische Radius im rotierenden Fall kleiner als im nichtrotierenden Fall (2.42), daher ist die Bedeutung der Rotation größer für die Stabilität als die des Gasdrucks. Bei der Bestimmung des kritischen Punktes ist die Annahme eingegangen, dass maximale Rotation vorliegt, was ich im Abschnitt 2.3.4 begründen werde. Die bisherigen Abschätzungen beruhen auf dem Modell der Roche-Näherung und dem Ausdruck für die Gesamtenergie (2.53), bei dem die post-Newtonsche Korrektur der Rotationsenergie vernachlässigt wurde. Numerische allgemeinrelativistische Gleichgewichtsmodelle rotierender 4/3-Polytrope von Baumgarte und Shapiro [3] liefern für den kritischen Punkt leicht abweichende Werte (Tabelle 2.1). Der maximal mögliche Drehimpuls J für ein rotierendes Schwarzes Loch (*Kerr-Lösung*) ist durch $J/M^2 = 1$ gegeben. Da am kritischen Punkt $j_{\text{krit}} = (J/M^2)_{\text{krit}} < 1$ gilt, kann ein rotierender extrem massereicher Stern zu einem Schwarzen Loch kollabieren, ohne dass Drehimpuls abgegeben werden muss. Die Zentraltemperatur ergibt sich aus den numerischen Modellen zu:

$$T_{\text{krit}}^{\text{rot}} = 9 \times 10^{10} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-2} [\text{K}]. \quad (2.62)$$

Für $M > 10^6 M_\odot$ ist die Zentraltemperatur kleiner als 6×10^7 K, also kann auch für rotierende Modelle die Bildung von Elektron-Positron-Paaren vernachlässigt werden.

2.3.4 Entwicklung bis zum Einsetzen der Instabilität

Ein extrem massereicher Stern kann sich beim Kollaps der primordialen, protogalaktischen Gaswolke bilden, aus dem auch der zentrale Bulge der Galaxie entsteht. Wie wir in Abschnitt 4.1 sehen werden, hat ein extrem massereicher Stern hohe Entropien pro Baryon mit $s_B \approx 1000$. Das ist erheblich größer als die Entropie des intergalaktischen Mediums. Da Kernbrennen im Stadium der Bildung wegen der geringen Temperaturen keine Rolle spielt, muss die Entropie in Stößen durch Umwandlung von kinetischer Energie erzeugt worden sein. Falls die Entropie nicht ausreichend erhöht wird, gewinnt der Einfluss der Rotation die Oberhand und es entsteht eine stark abgeflachte Scheibe [52]. Die Bildung einer solchen Scheibe (*supermassive disk*) ist daher eher wahrscheinlich als die Bildung eines extrem massereichen Sterns [37].

Die weitere Entwicklung eines Sterns wird nach seiner Bildung entscheidend durch die Leuchtkraft bestimmt, welche für extrem massereiche Sterne durch Photonen dominiert wird. Im hydrostatischen Gleichgewicht gilt, bei Vernachlässigung des Gasdrucks, für den Photonendruck P an der Sternoberfläche:

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = -\nabla \phi_{\text{grav}} = \frac{M}{R^2} \vec{e}_r, \quad (2.63)$$

wobei für das Gravitationspotential $\phi_{\text{grav}} = -M/R$ eingesetzt wurde (\vec{e}_r ist der Einheitsvektor in r-Richtung). Ist die Weglänge der Photonen so klein, dass der Photonenfluss \vec{F} isotrop ist, was im *lokalen thermodynamischen Gleichgewicht (LTE)* der Fall ist, kann man die *Diffusionsgleichung* nutzen, um \vec{F} durch (2.63) ausdrücken zu können:

$$\vec{F} = -\frac{1}{3\kappa\rho} \nabla U \quad \Rightarrow \quad \kappa \vec{F} = -\frac{1}{\rho} \nabla P, \quad (2.64)$$

mit der volumenspezifischen Energiedichte $U = aT^4 = 3P$ und der Opazität κ , die durch die *Thomsonstreuung* an freien Elektronen hervorgerufen wird. Je größer der Gradient des Gravitationspotentials, desto größer der Photonenfluss. Die Integration über die Sternoberfläche ergibt die Gesamtleuchtkraft zu:

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi M}{\kappa} = 1,3 \times 10^{38} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) [\text{erg s}^{-1}], \quad (2.65)$$

was als *Eddington-Leuchtkraft* bezeichnet wird. Diese Leuchtkraft kann nicht überschritten werden, da sonst der Photonenfluss so groß wird, dass ein hydrostatisches Gleichgewicht nicht möglich ist. Deshalb spricht man auch von Abstrahlung am *Eddington-Limit*.

Wie verändert sich diese Leuchtkraft durch Rotation? Bei Berücksichtigung des Zentrifugalpotentials wird an der Oberfläche der Druckgradient reduziert (2.45), was zu einer Reduktion des Photonenflusses führt. Für einen maximal rotierenden Stern verschwindet sogar der Druckgradient am Äquator, die Gravitationskraft wird allein durch die Zentrifugalkraft ausgeglichen; die Rotationsgeschwindigkeit entspricht der eines Teilchens auf einer kreisförmigen Kepler-Bahn

im Gravitationsfeld. Da $\vec{F} \propto \nabla P$ gilt, verschwindet am Äquator der Photonenfluss. Daher ist für einen rotierenden extrem massereichen Stern die Leuchtkraft reduziert; bei maximaler Rotation gilt $L_{\text{max rot}} = 0,639 \times L_{\text{Edd}}$ [4].

Bei der Entwicklung bis zum Einsetzen der Instabilität muss nun unterschieden werden zwischen nichtrotierenden und rotierenden extrem massereichen Sternen. Für die nichtrotierenden Modelle wird die Entwicklungszeit durch die abgestrahlte Energie bestimmt. Für die Gesamtenergie zum Zeitpunkt der Bildung gilt $E = 0$, denn für $\rho \rightarrow 0$ verschwinden die post-Newtonschen Korrekturen, und daher verschwindet nach (2.26) die Gesamtenergie. Durch die Abstrahlung am Eddington-Limit sinkt die Gesamtenergie und der Stern kontrahiert mit zunehmender Zentralkichte bis die Gesamtenergie den kritischen Wert (2.44) erreicht. Die post-Newtonschen Korrekturen erzeugen ein Minimum bei $(\rho_{\text{krit}}, E_{\text{krit}})$. Mit zunehmender Dichte ($\rho_z > \rho_{\text{krit}}$) gilt für die Gesamtenergie der Gleichgewichtsmodelle $E > E_{\text{krit}}$. Da der Stern aber strahlt, kann die Energie nicht über den Wert von E_{krit} zunehmen und die Instabilität setzt ein. Die Variationsmethode, wie ich sie in Abschnitt 2.3.1 erklärt habe, setzt voraus, dass der Stern sich im Gleichgewicht befindet, d.h. $\partial E / \partial \rho_z = 0$ gilt, und sich quasistatisch entwickelt. Dazu muss die Entwicklungszeit von der Entstehung des extrem massereichen Sterns bis zum Einsetzen der Instabilität größer als die hydrodynamische Zeitskala sein. Nach [48] erhält man:

$$t_{\text{krit}} \approx \frac{|E_{\text{krit}}|}{L_{\text{Edd}}} = 2,8 \times 10^{16} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1} [\text{s}], \quad (2.66)$$

$$t_{\text{Hydro}} \approx \rho^{-\frac{1}{2}} = 2,7 \times 10^{-6} [\text{s}]. \quad (2.67)$$

Die beiden Zeitskalen sind identisch für $M \sim 10^8 M_{\odot}$. Oberhalb dieser Masse gibt es keine Gleichgewichtsphase mehr in der Entwicklung nichtrotierender extrem massereicher Sterne.

Wenn ein rotierender extrem massereicher Stern bei der Bildung nicht maximal rotiert, beginnt er wegen Energieabstrahlung zu kontrahieren. Die Kontraktion dauert so lange bis schließlich der Zustand der maximalen Rotation erreicht wird und am Äquator Massenverlust einsetzt. Die Entwicklung des maximal rotierenden Sterns bis zum Einsetzen der Instabilität wurde ebenfalls von Baumgarte und Shapiro diskutiert [3]. Da für die Masse nach (2.23) $M \propto K^{3/2}$ gilt, erhält man als Gleichung für den Massenverlust $\dot{M} = dM/dt$:

$$\frac{\dot{M}}{M} = \frac{3}{2} \frac{\dot{K}}{K}. \quad (2.68)$$

Da die Polytropenkonstante durch die spezifische Entropie gegeben ist (Abschnitt 2.1), bestimmt die zeitliche Änderung der Entropie

$$L_{\text{rot max}} = -T\dot{S} \quad (2.69)$$

den Massenverlust. Das Verhältnis $T/|W|$ (2.52), das aus der Roche-Näherung gewonnen wurde, bleibt während der Entwicklung konstant, was auch die Untersuchung numerischer (d.h. ungenäherter) Modelle ergeben hat [3]. Da $T/|W| = \text{konst.}$ ist, muss während der Sternkontraktion ein Drehimpulsverlust einsetzen, der durch den Massenverlust am Äquator hervorgerufen wird. Mit diesen Annahmen erhält man Entwicklungsgleichungen für Radius, Masse und Drehimpuls. Ihre Lösung ergibt die Entwicklungszeit bis zum kritischen Punkt zu [3]:

$$t_{\text{krit rot}} = 8,8 \times 10^{11} [\text{s}]. \quad (2.70)$$

Die Entwicklungszeit hängt also nicht von der Masse ab. Man beachte, dass für $M > 3 \times 10^4 M_\odot$ die Entwicklungszeit eines rotierenden extrem massereichen Sterns größer ist als die eines nicht-rotierenden. Die hydrodynamische Zeitskala $t_{\text{Hydro rot}} \propto \rho_z^{-1/2}$ ergibt sich mit der mit der kritischen Dichte (2.60) zu:

$$t_{\text{Hydro rot}} = 1,3 \times 10^{-2} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) [\text{s}]. \quad (2.71)$$

Für alle Massen $M < 6,7 \times 10^{13} M_\odot$ ist damit die Entwicklungszeit länger als die hydrodynamische Zeitskala, womit die Entwicklung bis zum kritischen Punkt quasistatisch ist.

Kapitel 3

Theoretische Grundlagen und numerische Implementation

In diesem Kapitel möchte ich die wichtigsten Elemente des von mir benutzten Hydrodynamikprogrammes zusammenfassen. Es wurde von Harald Dimmelmeier während seiner Promotion entwickelt [11, 12, 13]. Eine gute Zusammenfassung allgemeinrelativistischer hydrodynamischer Methoden findet sich in dem Artikel von Font [19].

Grundlage der numerischen Lösung ist ein zweidimensionales Gitter. Die Ableitungen und Integrale lassen sich damit nach der Methode der *finiten Differenzen* bzw. *finiten Volumen* [40] berechnen. Als räumliche Koordinaten werden Kugelkoordinaten $(x^i) = (r, \theta, \varphi)$ verwendet, wobei alle Größen als unabhängig von der Koordinate φ angenommen werden. Gerechnet werden die Sterne in Achsensymmetrie, wobei die Achse mit $\theta = 0$ die Rotationsachse darstellt. Daher kann man den Code auch als $2\frac{1}{2}$ -dimensional bezeichnen.

Die Bezeichnung einer Größe q auf dem Gitter im Zellzentrum lautet wie folgt: $q_{ij} = q(r_i, \theta_j)$. Ganzzahlige Indizes entsprechen den Größen und Koordinaten in den Zellzentren, halbzahlige Indizes entsprechen den Zellwänden. $r_{i+1/2}$ ist der Radius der gemeinsamen Zellwand der Zellen mit den Radiuskoordinaten r_i und r_{i+1} . Eine Besonderheit ist die logarithmische Radiuskoordinate: Die Gitterzellen sind in Radiusrichtung nicht äquidistant, sondern der Abstand wächst exponentiell nach aussen. Damit lässt sich die Radiusauflösung im Zentrum steigern, was für den Kollaps von extrem massereichen Sternen erforderlich ist. Mit n_r wird die Anzahl der Gitterpunkte in r -Richtung bezeichnet, mit n_θ die Anzahl in θ -Richtung (die Anzahl der Atmosphärenpunkte (Abschnitt 3.4.5) in radialer Richtung ist n_a).

3.1 ADM- $\{3 + 1\}$ -Formalismus

In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird die Gravitation nicht mehr als Kraft in einem euklidischen Raum betrachtet, sondern ist eine Eigenschaft der vierdimensionalen gekrümmten Raumzeit, die man als Mannigfaltigkeit \mathcal{M} beschreiben kann, mit der Eigenschaft, dass an

jedem Punkt von \mathcal{M} ein flaches Minkowskikoordinatensystem eingeführt werden kann. Das erlaubt einem die Lösungsmethoden der Hydrodynamik aus der Speziellen Relativitätstheorie zu übernehmen. Aus den Einsteinschen Feldgleichungen erhält man als Lösung den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$. Wenn jetzt zu einem Zeitpunkt eine Metrik gegeben ist, bedarf es zeitlicher Entwicklungsgleichungen um die Metrik zu einem späteren Zeitpunkt berechnen zu können. Das ist ein sogenanntes *Anfangswertproblem* (AWP) oder *Cauchy-Problem*. Eine Möglichkeit aus den Einsteinschen Feldgleichungen solche Entwicklungsgleichungen zu gewinnen ist der *ADM- $\{3+1\}$ -Formalismus*, der von Arnowitt, Deser und Misner [1, 39] eingeführt wurde. Er beruht auf einer Zerlegung der vierdimensionalen Raumzeit nach Lichnerowicz [34]. Die Raumzeit wird aufgeblättert in diskrete raumartige Cauchy-Hyperflächen, die in differentiellen Abständen entlang der Zeitkoordinate angeordnet sind. Mit der Zeitkoordinate x^0 und den räumlichen Koordinaten x^i lautet das vierdimensionale Linienelement:

$$ds^2 = -(\alpha^2 - \beta_i \beta^i)(dx^0)^2 + 2\beta_i dx^0 dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.1)$$

Die Zeitdehnungsfunktion α beschreibt den Fortschritt der Zeit entlang eines zeitartigen Normalenvektors n^μ , senkrecht zur Hyperfläche. Im Newtonschen Grenzfall schwacher Gravitation ist $\alpha = 1$. Wie wir in Abschnitt 3.3.1 sehen werden, folgt aus $r \rightarrow \infty$, dass $\alpha = 1$ gilt. Daher ist x^0 die Zeitkoordinate eines weit entfernten Beobachters. In den Simulationen verwende ich für die Zeitkoordinate auch die Bezeichnung t , wobei $t = x^0$ gilt. Der Verschiebungsvektor β^i gibt die Verschiebung von x^i zwischen zwei Hyperflächen an. Der räumliche Tensor γ_{ij} spezifiziert den Abstand zwischen zwei Punkten in einer Hyperfläche. α , β^i und γ_{ij} variieren auf der Hyperfläche und müssen für jede Hyperfläche in der zeitlichen Entwicklung neu bestimmt werden. Mit Hilfe des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ lässt sich das Linienelement kompakter schreiben als:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu. \quad (3.2)$$

Für den metrischen Tensor ergibt sich dann die Form:

$$g_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} -\alpha^2 + \beta_i \beta^i & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \hline \beta_1 & & & \\ \beta_2 & & \gamma_{ij} & \\ \beta_3 & & & \end{array} \right). \quad (3.3)$$

Eine weitere Größe, die noch zur Aufstellung der Metrik-Gleichungen benötigt wird, ist die äußere Krümmung:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{n^\mu} \gamma_{ij}. \quad (3.4)$$

Hier ist \mathcal{L}_{n^μ} die Lie-Ableitung in Richtung des Normalenvektors n^μ der Cauchy-Hyperfläche (Für eine ausführliche Diskussion der Lie-Ableitung siehe [14]). Im ADM- $\{3+1\}$ -Formalismus erhält man jeweils 6 Entwicklungsgleichungen für die räumliche Metrik γ_{ij} und die äußere Krümmung K_{ij} . Die zeitliche Entwicklung lässt sich dann anhand von vier Bedingungsgleichungen [54] überprüfen. Bisher gelten diese Überlegungen für den allgemeinen Fall ohne die Annahme von Symmetrien und Eichfreiheiten. Der symmetrische Tensor $g_{\mu\nu}$ hat nämlich 10 Komponenten, während die Feldgleichungen aber nur 6 Komponenten festlegen. Die Feldgleichungen ergeben zwar 10 Gleichungen für die 10 Komponenten des metrischen Tensors, aber durch die vier Gleichungen der Bianchi-Identität bleiben nur 6 Gleichungen übrig. Somit liegt hier ein Problem der Unterbestimmtheit vor. Das ist zu erwarten, denn durch die vier Koordinatentransformationen $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ lässt sich der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ vierfach abändern. Diese

Koordinatenfreiheit kann dazu genutzt werden, um $g_{\mu\nu}$ vier Bedingungen aufzuerlegen [14], was die ADM-Gleichungen erheblich vereinfacht. Das ist äquivalent zu den Eichtransformationen, mit denen die Maxwellgleichungen der Elektrodynamik vereinfacht werden können. Es ist auch möglich, den Ableitungen des metrischen Tensors Eichbedingungen aufzuerlegen. Gebrauch gemacht werden kann davon, indem man für die Spur der äusseren Krümmung die Eichung $K = K_i^i = 0$ fordert, was als *größtmögliche Aufblätterung* (*maximal slicing*) der Hyperflächen bezeichnet wird.

3.1.1 Die konform flache Näherung (CFC)

Eine wesentliche Vereinfachung der ADM-Gleichungen lässt sich erreichen, wenn man für die räumliche Metrik γ_{ij} eine spezielle Form annimmt. Wilson [53] nutzte dazu zum ersten Mal eine sogenannte konform flache Metrik. Eine Metrik heißt konform flach, falls sie sich als Produkt der flachen Minkowskimetrik mit einer nichtverschwindenden differenzierbaren Funktion (konformer Faktor) darstellen lässt [14]. Mit dem konformen Faktor ϕ erhält man nach Konvention schließlich:

$$\gamma_{ij} = \phi^4 \hat{\gamma}_{ij}. \quad (3.5)$$

Für Kugelkoordinaten schreibt sich das Linienelement der Minkowski-Metrik:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.6)$$

Damit folgt für den metrischen Tensor (3.3) nun die vereinfachte Form der konform flachen Näherung (conformal flatness condition):

$$g_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} -\alpha^2 + \beta_i \beta^i & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \hline \beta_1 & \phi^4 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 0 & \phi^4 r^2 & 0 \\ \beta_3 & 0 & 0 & \phi^4 r^2 \sin^2 \theta \end{array} \right). \quad (3.7)$$

Der konforme Faktor ist im allgemeinen noch von den Koordinaten x^i abhängig und muss für jede Hyperfläche neu bestimmt werden. Der metrische Tensor wird insgesamt durch fünf Funktionen beschrieben: Der konforme Faktor ϕ , die Zeitdehnungsfunktion α und die drei Verschiebungsvektoren β^i . Für das Linienelement erhält man:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i)(dx^0)^2 + 2\beta_i dx^0 dx^i + \phi^4(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.8)$$

Bei der konform flachen Näherung werden ausser den Diagonalelementen noch drei weiteren Komponenten von γ_{ij} Bedingungen auferlegt: $g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0$. Man kann zeigen, dass für sphärisch symmetrische Sterne diese Bedingungen auch im dynamischen Fall erfüllt sind, d.h. die konform flache Näherung ist dann exakt. Eine wesentliche Konsequenz der CFC-Näherung ist die Elimination von Gravitationswellenfreiheitsgraden. Um eine Abschätzung über die Abweichung von der angenäherten allgemeinrelativistischen Lösung zu erhalten, kann man den Anteil der (in der CFC-Näherung vernachlässigten) emittierten Energie an der Gesamtenergie (kinetische Energie + Bindungsenergie) in Form von Gravitationswellen betrachten. Die Gravitationswellenemission ist proportional zur dritten Zeitableitung des Quadrupolmoments

der Materieverteilung. Durch die angenommene Achsensymmetrie, ist die Bildung eines rotierenden Balkens ($l = 2$: nichtaxialsymmetrische Instabilitätsmode) in der Materieverteilung ausgeschlossen, weshalb er als Quelle für ein quasiperiodisches Gravitationswellensignal ausgeschlossen werden kann. Eine andere mögliche Quelle sind auftretende Geschwindigkeiten in θ -Richtung. Während des Kollapses des rotierenden extrem massereichen Sterns waren die θ -Geschwindigkeiten kleiner als $0,03c$, und zeigten nur eine geringe zeitliche Veränderung. Das Quadrupolmoment sollte sich daher nur langsam ändern, die Gravitationswellenemission entzieht dem System nur einen vernachlässigbaren Teil der Gesamtenergie, weshalb ein signifikanter Einfluss auf die Dynamik ausgeschlossen werden kann.

Zum Vergleich sei erwähnt, dass bei einem sogenannten Kern-Kollaps-Szenario, bei dem der (Eisen)-Kern eines massereichen Sterns am Ende seiner thermodynamischen Entwicklung zu einem Neutronenstern kollabiert, der relative Energieverlust in Form von Gravitationswellen kleiner als 10^{-6} ist [56], obwohl in diesem Fall die zeitliche Änderung der Geschwindigkeiten aufgrund des Rückpralls am sich bildenden Neutronenstern erheblich größer sind. Zusammenfassend bleibt festzustellen, dass die konform flache Näherung für sphärische Modelle exakt ist, und für rotierende Modelle vernachlässigbare Abweichungen erzeugt, solange man sich nicht zu sehr dem Schwarzen Loch (Kerr-Loch) annähert (was bei meinen Simulationen aber auch nicht eintrat).

3.2 Allgemein Relativistische Hydrodynamik

Betrachtet werde eine *ideale Flüssigkeit* ohne innere Reibung (Viskosität). Sie lässt sich durch die Ruhemassendichte ρ , die Vierergeschwindigkeit u^i und den isotropen Druck P beschreiben. Bei vorgegebener Metrik lässt sich daraus der Energie-Impuls-Tensor konstruieren:

$$T_{\mu\nu} = \rho h u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (3.9)$$

mit der massenspezifischen relativistischen Enthalpie $h = 1 + \epsilon + P/\rho$. Der Ruhemassenstrom wird durch $J_\mu = \rho u_\mu$ definiert. Aus der Teilchenzahlerhaltung folgt die Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla^\mu J_\mu = 0, \quad (3.10)$$

und aus den Bianchi-Identitäten folgt die Energie-Impuls-Erhaltung:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (3.11)$$

$\nabla^\mu A_\nu$ ist die kovariante Ableitung, die für einen Vektor A_ν mit der partiellen Ableitung $\partial^\mu A_\nu$ die Relation $\nabla^\mu A_\nu = \partial^\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma$ erfüllt. Die Christoffelsymbole $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ folgen aus den Ableitungen des metrischen Tensors. Damit lassen sich die Erhaltungssätze (3.10, 3.11) umschreiben zu:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} J^\mu = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} = -\sqrt{-g} \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda}. \quad (3.13)$$

Hierbei ist $g = \det(g_{\mu\nu})$ die Determinante des metrischen Tensors. Die Geschwindigkeit v^i , die ein feststehender *Eulerscher Beobachter* misst, lässt sich durch die Vierergeschwindigkeit u^i ausdrücken:

$$v^i = \frac{u^i}{\alpha u^0} + \frac{\beta^i}{\alpha}. \quad (3.14)$$

Die Variablen (ρ, ϵ, v^i) ermöglichen eine eindeutige Beschreibung einer idealen Flüssigkeit. Man nennt sie die *primitiven Variablen*. Um die hyperbolischen Hydrodynamikgleichungen in der numerisch besonders geeigneten Form der *Erhaltungsgleichung* [40] schreiben zu können, verwendet man anstelle der primitiven Variablen die sogenannten *erhaltenen Variablen*. Eine mögliche Wahl für diese Variablen findet sich in [2], die ich ebenfalls benutzt habe:

$$D = \rho W, \quad (3.15)$$

$$S^i = \rho h W^2 v^i, \quad (3.16)$$

$$\tau = \rho h W^2 - P - D. \quad (3.17)$$

Hierbei ist D die geboostete Ruhemassendichte, S^i die Impulsdichte und τ die Energiedichte (die totale Energiedichte e abzüglich der Ruhemassendichte D : $\tau \equiv e - D$). Der Lorentzfaktor W wird definiert $W \equiv \alpha u^0$ und erfüllt die Relation:

$$W = \frac{1}{\sqrt{1 - v_i v^i}}. \quad (3.18)$$

Durch Einsetzen der erhaltenen Variablen in die lokalen Erhaltungsgleichungen (3.12, 3.13) gewinnt man ein System von fünf hyperbolischen Erhaltungsgleichungen für die fünf erhaltenen Variablen. Das sind die gesuchten *Hydrodynamikgleichungen in Erhaltungsform*:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial \sqrt{\gamma} \mathbf{F}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \sqrt{-g} \mathbf{F}^i}{\partial x^i} \right] = \mathbf{Q}, \quad (3.19)$$

für den Zustandsvektor (der erhaltenen Variablen) \mathbf{F}^0 , den Flussvektor \mathbf{F}^i und die Quellen \mathbf{Q} :

$$\mathbf{F}^0 = (D, S_j, \tau)^T, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{F}^i = \left(D \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right), S_j \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) + \delta_j^i P, \tau \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) + P v^i \right)^T, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{Q} = \left(0, T^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\nu j}}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda j} \right), \alpha \left(T^{\mu 0} \frac{\partial \ln \alpha}{\partial x^\mu} - T^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0 \right) \right)^T. \quad (3.22)$$

Hierbei ist $\sqrt{-g} = \alpha \sqrt{\gamma}$, $\gamma \equiv \det(\gamma_{ij}) = \phi^6 r^2 \sin^2 \theta$. Die drei Jacobimatrizen des Zustandsvektors bezüglich der drei räumlichen Flussrichtungen

$$\mathbf{B}^i = \alpha \frac{\partial \mathbf{F}^i}{\partial \mathbf{F}^0}, \quad (3.23)$$

haben jeweils 5 Eigenwerte (davon einer dreifach entartet) und fünf linear unabhängige Eigenvektoren $\{\lambda_k^i, \mathbf{r}_k^i\}_{k=1\dots 5}$. Da der Zustandsvektor ebenfalls 5 Komponenten hat, ist die Erhaltungsgleichung (3.19) hyperbolisch.

3.2.1 Lösung der Erhaltungsgleichungen

Es ist eine Eigenschaft von hyperbolischen Gleichungen, dass selbst aus glatten Anfangsdaten in der Zeitentwicklung Diskontinuitäten entstehen können. Daher sind die relativistischen Hydrogleichungen in ihrer differentiellen Form (3.19) zur numerischen Lösung nicht besonders geeignet [33]. Wenn man sie umschreibt in eine integrale Form, kann man die Unstetigkeiten leichter handhaben. Wenn Ω ein Ausschnitt der vierdimensionalen Raumzeit ist und $\partial\Omega$ eine zugehörige 3er-Oberfläche ergibt die Integration von (3.19):

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{\gamma} \mathbf{F}^0}{\partial x^0} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathbf{F}^i}{\partial x^i} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{Q} d\Omega. \quad (3.24)$$

Zur numerischen Integration werde nun eine Zelle (r_i, θ_j, ϕ_k) betrachtet, die durch sechs zeitartige Hyperflächen $\Sigma_{x_{i+1/2}^1}$ und $\Sigma_{x_{i-1/2}^1}$ (ebenso für x^2 und x^3) begrenzt wird. Mit Hilfe des vierdimensionalen Gaussschen Integrationssatzes ergibt sich die Zeitentwicklung des Zustandsvektors \mathbf{F}^0 zu [19]:

$$\begin{aligned} & (\bar{\mathbf{F}}^0 \Delta V)_{x^0 + \Delta x^0} - (\bar{\mathbf{F}}^0 \Delta V)_{x^0} = \\ & - \left(\int_{\Sigma_{x_{i+1/2}^1}} \sqrt{-g} \hat{\mathbf{F}}^1 dx^0 dx^2 dx^3 - \int_{\Sigma_{x_{i-1/2}^1}} \sqrt{-g} \hat{\mathbf{F}}^1 dx^0 dx^2 dx^3 \right) \\ & - (\dots)_{\Sigma_{x^2}} - (\dots)_{\Sigma_{x^3}} + \int_{\Omega} \mathbf{Q} d\Omega, \end{aligned} \quad (3.25)$$

mit dem 3er-Volumen:

$$\Delta V = \int_{x_{i-1/2}^1}^{x_{i+1/2}^1} \int_{x_{j-1/2}^2}^{x_{j+1/2}^2} \int_{x_{k-1/2}^3}^{x_{k+1/2}^3} \sqrt{\gamma} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (3.26)$$

Man erhält den gemittelten Zustandsvektor

$$\bar{\mathbf{F}}^0 = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \sqrt{\gamma} \mathbf{F}^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (3.27)$$

mit diesem Verfahren ausgehend von der Hyperfläche Σ_{x^0} auf der Hyperfläche des nächsten Zeitschrittes $\Sigma_{x^0+\Delta x^0}$. Falls die Quellterme verschwinden ist die Änderung des Zustandsvektors $\bar{\mathbf{F}}^0$ allein durch den Fluss durch die Zellwände Σ_{x^i} gegeben. Die integrale Formulierung der Erhaltungsgleichungen garantiert, dass das Volumenintegral über alle Zellen für jede Komponente des Zustandsvektors erhalten ist, falls kein Fluss über den Rand des Integrationsgebietes geht und die Quellen verschwinden. In Abschnitt 4.1 werden wir die Ruhemasse durch das Volumenintegral über die erhaltene Größe D aufgrund dieser Eigenschaft definieren.

Um den Fluss $\hat{\mathbf{F}}^1$ zu bestimmen wird an der zugehörigen Zellwand ein lokales *Riemann-Problem* gelöst. Diese Vorgehensweise wurde von Godunov (1959) [22] vorgeschlagen. Verfahren mit dieser Art werden auf Grund ihrer Eigenschaften *HRSC-Verfahren* (*high resolution shock capturing*), oder nach ihrem Erfinder *Godunov-artige Verfahren* genannt. Um das Riemannproblem zu lösen, gibt es zwei große Klassen von Lösern: Zum einen die exakten Riemannlöser, zum anderen die approximativen Riemannlöser [40]. Der Vorteil von approximativen Riemannlösern ist eine schnellere Berechnung, insbesondere bei relativistischen Strömungen, wobei eine lokal linearisierte Form der Hydrodynamikgleichungen (3.19) gelöst wird. Eine Sammlung verschiedener approximativer Riemannlöser findet sich in [38].

3.2.2 Approximative Riemannlöser

Um das Riemannproblem approximativ zu lösen, werden die Hydrodynamikgleichungen lokal linearisiert. Dieses Verfahren wurde von Roe [44] eingeführt. Dazu werden die Hydrodynamikgleichungen (3.19) umgeschrieben in:

$$\frac{\partial \mathbf{F}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^3}{\partial x^3} + \alpha \bar{\mathbf{Q}} = 0, \quad (3.28)$$

mit $\bar{\mathbf{F}}^i = \alpha \mathbf{F}^i$ und den Quellen:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \left(\mathbf{F}^0 \frac{\partial \ln \sqrt{\gamma}}{\alpha \partial x^0} + \mathbf{F}^i \frac{\partial \ln \sqrt{\gamma}}{\partial x^i} - \mathbf{Q} \right). \quad (3.29)$$

Unter Ausnutzung der Jacobimatrix (3.23) erhält man für den homogenen Anteil:

$$\frac{\partial \mathbf{F}^0}{\partial x^0} + \mathbf{B}^i \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^i}{\partial x^i} = 0. \quad (3.30)$$

Die Näherung besteht nun darin, dass die Jacobimatrix \mathbf{B}^i für jedes Riemannproblem an den Zellwänden durch die konstante Matrix $\bar{\mathbf{B}}^i$ ersetzt wird. Es handelt sich also um eine *lokale*

Linearisierung. Da der vollständige Satz von Eigenwerten und Eigenvektoren bekannt ist, lässt sich die Jacobimatrix diagonalisieren:

$$\bar{\mathbf{B}}^i = \mathbf{R}^i \mathbf{\Lambda}^i (\mathbf{R}^i)^T. \quad (3.31)$$

Hier ist $\mathbf{R}^i = [\mathbf{r}_1^i | \dots | \mathbf{r}_5^i]$ die Matrix mit den Eigenvektoren als Spalten, und $\mathbf{\Lambda}^i$ die Diagonalmatrix mit den Elementen λ_k^i . Ein Wechseln zu den charakteristischen Variablen $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}^T \mathbf{F}^0$ liefert ein entkoppeltes System von Advektionsgleichungen mit konstanten Koeffizienten λ_k^i , die den *charakteristischen Geschwindigkeiten* entsprechen:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}^i}{\partial x^0} + \mathbf{\Lambda}^i \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}^i}{\partial x^i} = 0. \quad (3.32)$$

Die Wellenstärken $\Delta \boldsymbol{\alpha}^i = \boldsymbol{\alpha}_R^i - \boldsymbol{\alpha}_L^i$ ergeben sich aus der Projektion des Sprungs des Zustandsvektors auf die rechten Eigenvektoren:

$$\mathbf{F}^0(\mathbf{w}_R) - \mathbf{F}^0(\mathbf{w}_L) = \sum_{k=1}^5 \Delta \bar{\alpha}_k^i \bar{\mathbf{r}}_k^i. \quad (3.33)$$

Die gestrichenen Größen werden gemittelt in Abhängigkeit von *rekonstruierten* primitiven Variablen auf der rechten \mathbf{w}_R und linken Seite \mathbf{w}_L der Zellwand. Ein Vergleich der Gleichung (3.28) liefert nach Mittelung über die rechte und linke Seite den Fluss nach Roe [44]:

$$\hat{\mathbf{F}}^i = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}^i(\mathbf{w}_R) + \mathbf{F}^i(\mathbf{w}_L) - \sum_{k=1}^5 |\bar{\lambda}_k^i| \Delta \bar{\alpha}_k^i \bar{\mathbf{r}}_k^i \right). \quad (3.34)$$

Die Summe innerhalb des Flusses stellt die sogenannte *numerische Viskosität* dar. Damit werden numerische Schwingungen mit hoher Wellenzahl (Oszillationen kleiner Wellenlänge) gedämpft, während die physikalischen Strukturen mit kleiner Wellenzahl idealerweise nicht beeinflusst werden. Die primitiven Variablen an den Zellwänden werden durch eine *Rekonstruktion* aus den Zellmittelwerten gewonnen. Je kleiner der Sprung an der Zellwand ist, also die Differenz $\mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L$, desto genauer wird das lokale Riemannproblem gelöst. Der einfachste Ansatz ist eine konstante Rekonstruktion, bei der die rekonstruierten primitiven Variablen identisch zu den gemittelten Zellwerten sind. Das wurde ursprünglich von Godunov [22] so vorgeschlagen. Dieses Verfahren ist aber räumlich nur von erster Ordnung genau. Für die Rekonstruktion wurde bei meinen Rechnungen eine verbesserte Variante benutzt: Die stückweise parabolische Rekonstruktion (*PPM*) nach Colella und Woodward [9]. Eine weitere Verbesserung ist der Fluss nach Marquina [15]. Hierbei wird die numerische Viskosität nicht durch Mittelung über die Zellwände gewonnen, sondern aus dem rechten und linken Zustand getrennt:

$$\hat{\mathbf{F}}^i = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}^i(\mathbf{w}_R) + \mathbf{F}^i(\mathbf{w}_L) - \sum_{k=1}^5 (\mathbf{r}_k^{iR} |\lambda_k^i|_{\max} \alpha_k^{iR} - \mathbf{r}_k^{iL} |\lambda_k^i|_{\max} \alpha_k^{iL}) \right), \quad (3.35)$$

mit $|\lambda_k^i|_{\max} = \max(\lambda_k^{iR}, \lambda_k^{iL})$. Die Berechnung des Zeitschrittes Δx^0 erfolgt nach der Methode von *Courant-Friedrichs-Levy* (*CFL*). Der Zeitschritt muss so klein sein, dass die Wellen zweier benachbarter Diskontinuitäten während eines Zeitschrittes nicht interferieren können [40]. Je kleiner die Gitterzellen und je größer die Geschwindigkeiten sind, desto kleiner ist der Zeitschritt. Der Zeitschritt wird für alle Gitterzellen einzeln bestimmt und das Minimum wird für

den globalen Zeitschritt verwendet. Da ich ein Gitter mit logarithmischer Radiuskoordinate verwende, bestimmt die Größe der innersten Zellen im Zentrum den Zeitschritt. Manchmal kann es bei besonders starken Stoßwellen nötig sein, den Zeitschritt noch weiter abzusenken als es die CFL-Bedingung vorgibt.

3.3 Metrikgleichungen

Mit der Eichung der größtmöglichen Aufblätterung (maximal slicing) und der konform flachen Näherung lassen sich nun die ADM-Gleichungen umschreiben in ein System fünf gekoppelter elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\hat{\Delta}\phi = -2\pi\phi^5 \left(\rho h W^2 - P + \frac{K_{ij}K^{ij}}{16\pi} \right), \quad (3.36)$$

$$\hat{\Delta}(\alpha\phi) = 2\pi\alpha\phi^5 \left(\rho h(3W^2 - 2) + 5P + \frac{7K_{ij}K^{ij}}{16\pi} \right), \quad (3.37)$$

$$\hat{\Delta}\beta^i = 16\pi\alpha\phi^4 S^i + 2\hat{K}^{ij}\hat{\nabla}_j \left(\frac{\alpha}{\phi^6} \right) - \frac{1}{3}\hat{\nabla}^i\hat{\nabla}_k\beta^k, \quad (3.38)$$

wobei $\hat{\Delta}$ der gewöhnliche Laplace-Operator des flachen Raumes ist. Es handelt sich um partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die zusätzlich noch über die rechte Seite koppeln, da die Kontraktion $K_{ij}K^{ij}$ der äusseren Krümmung wiederum eine Funktion von α und den β^i ist. Zur Lösung der fünf Metrikgleichungen wird zunächst ein Vektor der fünf unbekannten Variablen definiert:

$$\hat{u} = (u^k) = (\phi, \alpha\phi, \beta^1, \beta^2, \beta^3). \quad (3.39)$$

Der Vektor \hat{u} wird auf den Gitterzellen diskretisiert. Für den Zellmittelpunkt (r_i, θ_j) ist entsprechend \hat{u}_{ij} definiert. Die Quellen auf der rechten Seite werden mit $\hat{f} = (f^k)$ bzw. \hat{f}_{ij} bezeichnet. Die Ableitungen nach r und θ werden nach der Mittelpunktmethode im Verfahren der finiten Differenzen gewonnen. Damit erhält man ein nichtlineares System der Dimension $5 \times n_r \times n_\theta$:

$$\hat{f}(\hat{u}) = 0. \quad (3.40)$$

Eine Möglichkeit es zu lösen ist die Jacobi-Matrix von \hat{f} zu berechnen und damit das System zu linearisieren. Das kann dann mit einem *mehrdimensionalen Newton-Raphson* gelöst werden. Die Jacobi-Matrix wird dann jede Iteration neu berechnet. Der Vorteil des Verfahrens ist die rasche (quadratische) Konvergenz. Typischerweise werden weniger als 10 Iterationschritte benötigt, um eine relative Änderung von \hat{u} geringer als 10^{-15} zu erreichen. Für Details der *Newton-Methode* siehe [11, 12]. Eine andere Möglichkeit zur Lösung der Metrikgleichungen nutzt die Green-Funktion des Laplace-Operators, was ich im Abschnitt 3.3.2 erkläre (*Green-Methode*).

3.3.1 Isotrope Schwarzschildmetrik

In diesem Abschnitt möchte ich kurz erklären, wie man eine äussere Randbedingung für die Metriklösung erhalten kann. Die Randbedingung ist erforderlich für die Lösung der Metrikgleichungen mit der Newton-Iterationsmethode, aber man kann sie auch für eine abgewandelte Variante der Green-Methode einsetzen (Abschnitt 3.3.4). Für die Berechnung von Sternen sind die Abweichungen von der sphärischen Symmetrie gering, was ja schon für die Einführung der konform flachen Näherung genutzt wurde (Abschnitt 3.1.1). Für einen sphärischen Stern, lässt

sich die Metrik im Aussenraum durch die *Schwarzschildmetrik* beschreiben. Durch die Wahl der Koordinaten lassen sich alle Elemente ausserhalb der Diagonalen des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ zu Null setzen, wodurch sich die Standard-Schwarzschildkoordinaten auszeichnen [18]. Das Linienelement der Schwarzschildmetrik in Standard-Schwarzschildkoordinaten (\hat{t}, \hat{r}) hat die folgende Form:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{M_{\text{grav}}}{\hat{r}} \right) d\hat{t}^2 + \frac{d\hat{r}^2}{1 - \frac{M_{\text{grav}}}{\hat{r}}} + \hat{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.41)$$

hierbei ist M_{grav} die gravitierende Gesamtmasse. Aus (3.41) ist unmittelbar ersichtlich, dass $g_{\mu\nu,0} = 0$ gilt, d.h. die Lösung ist stationär. Es lässt sich auch noch zeigen, dass sie darüberhinaus sogar statisch ist [14]. Damit erhält man die wichtige Aussage: Die Metrik im Aussenraum eines sphärischen Sterns ist statisch (auch wenn der Stern selbst nicht statisch ist). Das ist eine Konsequenz des *Birkhoff-Theorems* [14]. Daraus folgt überdies, dass ein sphärischer Stern keine Gravitationswellen emittieren kann. Für $r \rightarrow \infty$ geht die Schwarzschildmetrik in die Minkowskimetrik für Kugelkoordinaten (3.6) über, sie ist also *asymptotisch flach*.

Man sucht neue Koordinaten, in denen sich die Schwarzschildmetrik explizit als konform flach schreiben lässt. Die Schwarzschildmetrik ist statisch, wobei die Koordinaten so angepasst sind, dass die Kreuzterme $dx^0 dx^i$ verschwinden. Da das Birkhoff-Theorem koordinatenunabhängig ist, kann man erwarten, dass auch die noch abzuleitende andere Form der Schwarzschildmetrik statisch ist, wobei wir ebenfalls eine angepasste Form mit verschwindenden Kreuztermen suchen, d.h. mit $\beta_i = 0$. Damit reduziert sich das Linienelement (3.8) auf die Form:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)d\sigma^2, \quad (3.42)$$

wobei $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ bzw. $d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ das Linienelement des dreidimensionalen euklidischen Raumes in kartesischen Koordinaten bzw. Kugelkoordinaten ist. Die räumliche Metrik γ_{ij} der konform flachen Näherung wurde ja gerade so gewählt, dass sie für jeden Schnitt $t = \text{konst.}$, also der Hyperfläche Σ_t , konform zur Metrik des dreidimensionalen euklidischen Raumes ist. Die Schwarzschildmetrik (3.41) in Standard-Schwarzschildkoordinaten ist offensichtlich nicht von der Form (3.42), weshalb sie nun durch die Koordinatentransformation

$$\hat{r} = r \left(1 + \frac{M_{\text{grav}}}{2r} \right)^2, \quad (3.43)$$

$$d\hat{r} = dr \left(1 - \frac{M_{\text{grav}}}{4r^2} \right), \quad (3.44)$$

in die sogenannte *isotrope Schwarzschildmetrik* überführt wird:

$$ds^2 = - \frac{\left(1 - \frac{M_{\text{grav}}}{2r} \right)^2}{\left(1 + \frac{M_{\text{grav}}}{2r} \right)^2} dt^2 + \left(1 + \frac{M_{\text{grav}}}{2r} \right)^4 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.45)$$

Die Koordinaten (t, r) heißen entsprechend *isotrope Koordinaten*. Die isotrope Schwarzschildmetrik beschreibt, wie die Schwarzschildmetrik, die Metrik im Aussenraum eines sphärischen (auch dynamischen) Sterns. Sie ist ebenfalls stationär, statisch und asymptotisch flach. Ein wesentlicher Unterschied zu der Schwarzschildmetrik (3.41) in Standard-Schwarzschildkoordinaten ist,

dass die Koordinatensingularität beim Schwarzschildradius $\hat{r}_s = 2M$ behoben worden ist (diese Singularität tritt für einen weit entfernten Beobachter auf, jedoch nicht für einen mitbewegten Beobachter: deswegen ist es eine hebbare Koordinatensingularität). Den Schwarzschildradius in isotropen Koordinaten erhält man aus (3.43) zu $r_s = M/2$.

Aus der isotropen Schwarzschildmetrik kann man für einen sphärischen Stern die Randbedingungen bei einem endlichen Gitterradius erhalten. Für rotierende Sterne ($v_3 \neq 0$) oder für Sterne mit meridionaler Geschwindigkeit ($v_2 \neq 0$), gilt sie im Aussenraum wegen der Abweichung von der sphärischen Symmetrie dagegen nicht mehr. Die Metrik ist dann nicht mehr statisch, die Kreuzterme $dx^0 dx^i$ lassen sich nicht zum Verschwinden bringen, d.h. es gilt $\beta_i \neq 0$. Man kann auch sagen, der Raum wird durch die Rotation des Sterns mitgenommen (*Frame-Dragging*). Bei der numerischen Untersuchung radialer, pulsierender Sterne hat sich darüberhinaus herausgestellt, dass selbst in diesem Fall nicht alle Verschiebungsvektoren identisch Null sind ($\beta_1 \neq 0$), wenn die Green-Methode zur Metriklösung verwendet wird. Diese numerische Abweichung rührt vermutlich daher, dass die Green-Methode nur für Randbedingungen bei $r \rightarrow \infty$, also bei vorgegebener asymptotischer Flachheit, exakt ist (Abschnitt 3.3.2).

Um eine Abschätzung darüber zu erhalten, wie groß dieser Effekt ist, kann man z.B. ein Profil des radialen Verschiebungsvektors β_r betrachten (Abb. 3.1). Hierbei wurde das Beispiel eines Neutronensterns ausgewählt, der mit hoher radialer Geschwindigkeit ($v_r \sim 0,1c$) pulsiert. Der Sternradius befindet sich bei $R \approx 10$ km, der Gitterradius bei $R_G \approx 31$ km. Nach der isotropen Schwarzschildmetrik sollte im Aussenraum ($r > R$) $\beta_r = 0$ gelten, was aufgrund $v_1 \neq 0$ ($r < R$) nicht erfüllt ist. Man beachte, dass beim Gitterradius $R_G \sim 3 R$ der Wert von β_r auf etwa ein Zehntel des Wertes am Sternradius gefallen ist. Ein ähnliches Verhalten ergibt sich für die anderen Verschiebungsvektoren β_θ und β_φ im Fall von Rotation bzw. meridionaler Geschwindigkeit. Daher ist zu erwarten, dass mit zunehmenden Abstand vom Sternrand die Metrik sich immer besser durch eine isotrope Schwarzschildmetrik beschreiben lässt. Da ein extrem massereicher Stern um einen Faktor von > 1000 kontrahiert, während die Geschwindigkeiten unterhalb 1% der Lichtgeschwindigkeit liegen, ist der Gitterradius mehr als 1000-mal größer als der Sternradius, bevor Geschwindigkeiten von $v_i \sim c$ erreicht werden. Daher kann man für diesen Fall die Randbedingungen der Metrik am Gitterradius in guter Näherung aus der isotropen Schwarzschildmetrik (3.45) erhalten:

$$\alpha|_{R_G} = \frac{1 - \frac{M_{\text{grav}}}{2R_G}}{1 + \frac{M_{\text{grav}}}{2R_G}}, \quad \phi|_{R_G} = 1 + \frac{M_{\text{grav}}}{2R_G}, \quad \beta^i|_{R_G} = 0. \quad (3.46)$$

3.3.2 Lösung der Metrikgleichungen mit Green-Funktion

Die Metrikgleichungen sind von der Form $\Delta u^k = f^k$. Die Ähnlichkeit zur *Poisson-Gleichung* der Elektrodynamik wird nun ausgenutzt und ein daher bekanntes Lösungsverfahren benutzt. Mit Hilfe der Green-Funktion $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ des Laplace-Operators, die definiert ist durch:

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (3.47)$$

lassen sich die Metrikgleichungen durch ein Volumenintegral über die Quellen darstellen:

$$u^k(r, \theta) = - \int \frac{d^3r' f^k(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = - \int_0^\infty dr' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{f^k(r', \theta')}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2}}, \quad (3.48)$$

mit $\gamma = \theta - \theta'$. Nun nutzt man die Entwicklung des reziproken Abstandes $1/|r - r'|$ in eine Reihe von Legendre-Polynomen $P^{(l)}$:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2}} = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{l=0}^\infty P^{(l)}(\cos \gamma) \frac{r'^l}{r^{l+1}} & (r' < r) \\ \sum_{l=0}^\infty P^{(l)}(\cos \gamma) \frac{r^l}{r'^{l+1}} & (r' > r) \end{array} \right\}. \quad (3.49)$$

Je geringer die Abweichung von der Kugelsymmetrie ist, desto schneller konvergiert die Reihe mit wachsendem l . Als Näherung wird die Summe nur bis zu einem endlichen $l = L$ berechnet. Selbst für rotierende Polytrope genügt $L < 30$. Durch Ausführung des Integrals über $d\varphi$ in Achsensymmetrie erhält man:

$$u^k(r, \theta) = -2\pi \sum_{l=0}^L P^{(l)}(\cos \theta) \left\{ \Phi_{\text{in}}^{(l)}(r) + \Phi_{\text{au}}^{(l)}(r) \right\}, \quad (3.50)$$

mit jeweils einem inneren und äusseren Potential, das nicht mehr von θ abhängig ist:

$$\Phi_{\text{in}}^{(l)}(r) = \frac{1}{r^{l+1}} \int_{r' < r} dr' r'^{l+2} \int_0^{\pi/2} f^k(r', \theta') P^{(l)}(\cos \theta') \sin \theta' d\theta', \quad (3.51)$$

$$\Phi_{\text{au}}^{(l)}(r) = r^l \int_{r' > r} \frac{dr'}{r'^{l-1}} \int_0^{\pi/2} f^k(r', \theta') P^{(l)}(\cos \theta') \sin \theta' d\theta', \quad (3.52)$$

wobei wir noch zusätzlich Äquatorsymmetrie annehmen. Ich habe auf den Index k für das innere und äussere Potential der Übersichtlichkeit wegen verzichtet. Wenn ich nicht besonders darauf hinweise, gelten die Beziehungen für alle $k \in \{1, 5\}$. Zur Diskretisierung werden folgende Größen definiert: $\Phi_{\text{in},i} = \Phi_{\text{in}}(r_i)$, $\Phi_{\text{au},i} = \Phi_{\text{au}}(r_i)$, $F_{op} = f^k(r_o, \theta_p)$. Näherungsweise werden die Größen über eine Gitterzelle als konstant angesehen. Die Integrale über dr und $d\theta$ werden also aufgespalten in Integrale über die einzelnen Zellen:

$$\Phi_{\text{in},i} = \frac{1}{r_i^{l+1}} \sum_{o=1/2}^{i-1/2} R_{\text{in},o}^l \sum_{p=1}^{n_\theta} F_{op} T_p^{(l)}, \quad \Phi_{\text{au},i} = r_i^l \sum_{o=i+1/2}^{n_r-1/2} R_{\text{in},o}^l \sum_{p=1}^{n_\theta} F_{op} T_p^{(l)}. \quad (3.53)$$

Die folgenden Hilfsgrößen sind unabhängig von den Quellen, und daher genügt es, sie einmal zu bestimmen:

$$R_{\text{in},i}^{(l)} = \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} r'^{l+2} dr', \quad R_{\text{au},i}^{(l)} = \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \frac{dr'}{r'^{l-1}}, \quad (3.54)$$

$$T_j^{(l)} = \int_{\theta_{j-1/2}}^{\theta_{j+1/2}} P^{(l)}(\cos \theta') \sin \theta' d\theta'. \quad (3.55)$$

Schließlich lassen sich die Potentiale sehr effektiv durch eine Rekursionsformel darstellen:

$$\Phi_{\text{in},i+1}^{(l)} = \frac{1}{r_i^{l+1}} \left(\Phi_{\text{in},i}^{(l)} r_i^{l+1} + R_{\text{in},i+1/2}^{(l)} \sum_{p=1}^{n_\theta} T_p^{(l)} F_{ip} \right), \quad (3.56)$$

$$\Phi_{\text{au},i-1}^{(l)} = r_{i-1}^l \left(\Phi_{\text{au},i}^{(l)} \frac{1}{r_i^l} + R_{\text{au},i-1/2}^{(l)} \sum_{p=1}^{n_\theta} T_p^{(l)} F_{ip} \right). \quad (3.57)$$

Als Randbedingungen erhält man für die Potentiale $\Phi_{\text{in}}^{(l)}(r=0) = 0$ und $\Phi_{\text{au}}^{(l)}(r=\infty) = 0$. Als Näherung wird die Randbedingung für das äussere Potential beim endlichen Gitterradius R_G genommen, womit schließlich gilt:

$$\Phi_{\text{in}}^{(l)} \Big|_0 = 0, \quad \Phi_{\text{au}}^{(l)} \Big|_{R_G} = 0. \quad (3.58)$$

Wenn man die Randbedingung von Φ_{au} für $r \rightarrow \infty$ nehmen würde, wäre $\Phi_{\text{au}}^{(l)}(r=R_G) \neq 0$, da die Quellen für die Rekursion (3.57) i.A. wegen $\beta_i \neq 0$ auch für $r > R_G$ nicht verschwinden. Nur für sphärische Sterne gilt (analytisch), dass $\beta_i = 0$. Durch die Randbedingungen (3.58) wird ein Teil des Integrationsgebietes für das innere und äussere Potential abgeschnitten, der Support ist nicht kompakt. Da die Verschiebungsvektoren ausserhalb des Sterns schnell abfallen (Abschnitt 3.3.1) und da ihr Anteil an den Quellen im Vergleich zu den primitiven Variablen klein ist, dominieren die Quellen innerhalb des Sterns. Daher ist zu erwarten, dass am Gitterradius $\Phi_{\text{in}} \ll \Phi_{\text{au}}$ gilt, wie Abb. 3.2 beispielhaft zeigt, und dass deswegen die Näherung nur einen geringen Einfluss auf die Metriklösung hat.

Da die Metrikgleichungen (3.36-3.38) sowohl nichtlinear als auch gekoppelt sind, wird der Lösungsvektor u^k mit einer *Fixpunktiteration* gewonnen:

1. Der Startvektor $u^{k(1)}$ ist gegeben durch die Metriklösung des vorherigen Zeitschrittes (bzw. im ersten Zeitschritt durch die Metrik des Anfangsmodells oder die Minkowskimetrik).
2. Wenn $u^{k(n)}$ der n-te iterierte Lösungsvektor ist, werden durch Einsetzen in die rechten Seiten der Metrikgleichungen die Quellen $f^{k(n)}$ und aus (3.56) bzw. (3.57) werden die Potentiale Φ_{in} bzw. Φ_{au} bestimmt. Den Hilfs-Lösungsvektor $\hat{u}^{k(n+1)}$ erhält man aus (3.50).
3. Um die Konvergenz zu verbessern wird der neue Lösungsvektor $u^{k(n+1)}$ nach der *Overrelaxations-Methode* [24] bestimmt:

$$u^{k(n+1)} = w \hat{u}^{k(n+1)} + (1-w) u^{k(n)}. \quad (3.59)$$

Hierbei ist w eine Art Dämpfungsfaktor ($w < 1$), der experimentell herausgefunden werden muss.

4. Die Iteration wird beendet, wenn das Konvergenzkriterium $u^{k(n+1)}/u^{k(n)} < 10^{-6}$ für alle $k \in \{1, 5\}$ erfüllt ist.

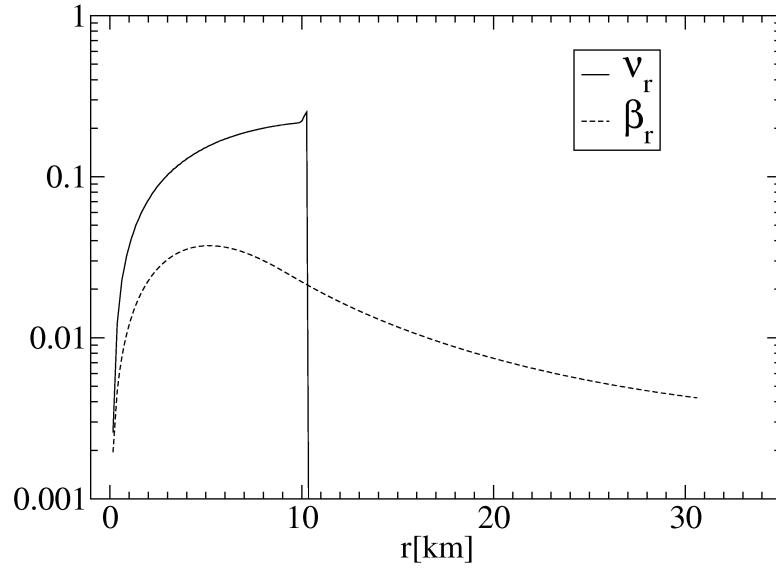


Abbildung 3.1: Der radiale Verschiebungsvektor $-\beta_r = -\sqrt{\beta_1\beta^1}$ und die radiale Geschwindigkeit $v_r = \sqrt{v_1v^1}$ eines sphärischen Neutronensterns mit radialer Pulsation. Die Lösung der Metrikgleichungen erfolgt mit der Green-Methode. Der Sternradius liegt bei $R \approx 10$ km, der Radius des Gitters bei $R_G \approx 31$ km.

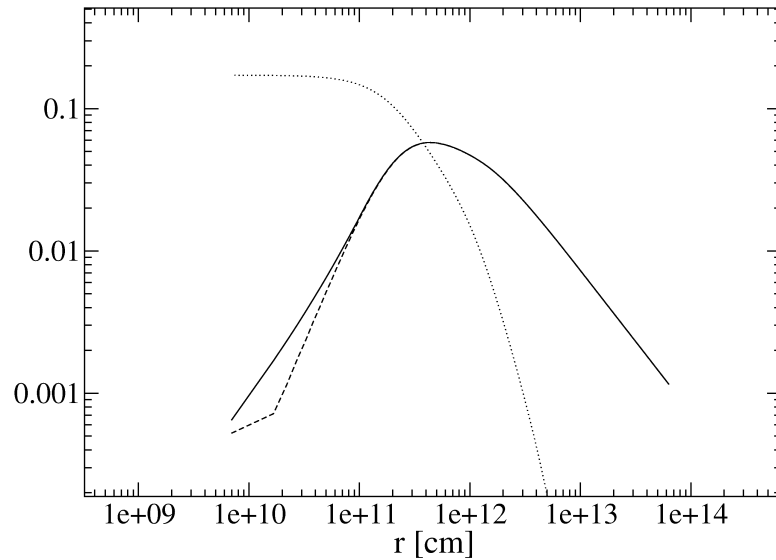


Abbildung 3.2: Vergleich des äusseren Potentials Φ_{au} (gepunktete Linie), mit dem inneren Potential Φ_{in} . Das innere Potential wurde einmal aus der Rekursion (3.63) mit Extrapolation für $r \rightarrow 0$ bestimmt (durchgezogene Linie) und einmal aus der Rekursion (3.56) (gestrichelte Linie).

3.3.3 Entartung der nicht-linearen Metrikgleichungen

Um das Lösungsverfahren der Metrikgleichungen für starke Gravitationsfelder zu überprüfen, habe ich Neutronensterne mit Zentraldichten oberhalb der Kerndichte $\rho_K \approx 2 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ konstruiert. Aus der Lösung der TOV-Gleichung erhält man die Metrikfunktionen $\phi(r)$ und $\alpha(r)$ sowie das Dichteprofil $\rho(r)$, woraus sich die sphärischen Anfangsmodelle konstruieren lassen (Abschnitt 3.5.1). Wenn man die Metrik für das Anfangsmodell mit Hilfe der Newton-Methode oder Green-Methode löst, sollte es eine Übereinstimmung mit $\phi(r)$ und $\alpha(r)$ geben (die Verschiebungsvektoren sind für sphärische Anfangsmodelle identisch Null $\beta_i = 0$). Man beachte, dass für statische, sphärische Anfangsmodelle die Lösung der Metrikgleichungen exakt sein sollte, ein Einfluss der bisher gemachten Näherungen auf die Metrik-Lösung kann also ausgeschlossen werden:

1. Die konform flache Näherung ist exakt in sphärischer Symmetrie.
2. Die äusseren Randbedingungen werden exakt durch die isotrope Schwarzschildmetrik (3.46) vorgegeben.
3. Der Support für die Potentiale Φ_{in} und Φ_{au} ist kompakt, d.h. die Green-Methode verwendet exakte Randbedingungen.

Bei der Lösung der Metrik-Gleichungen mit Newton-Methode und Green-Methode ergaben sich z.T. erhebliche Unterschiede zu den Metrikfunktionen der TOV-Lösung. Dabei wurde eine Abhängigkeit von dem Start-Vektor $u^{k(1)}$ (mit der bei der Metrik-Iteration der erste Quellenvektor $f^{k(1)}$ bestimmt wird) festgestellt. Für die unterschiedlichen Methoden ergab sich dabei jeweils (vgl. Abb. 3.3):

- *Newton-Methode*: Die Lösung der Metrikgleichung stimmt mit der Lösung aus der TOV-Gleichung überein, wenn diese als Startwert für die Newton-Iteration verwendet wird. Wenn die flache Minkowski-Metrik ($\phi = 1$, $\alpha = 1$) als Startwert genommen wird, konvergiert die Newton-Iteration zu einer Lösung mit Werten von ϕ und α zwischen der TOV-Lösung und der Minkowski-Metrik.
- *Green-Methode*: Wenn als Startwert die Minkowski-Metrik verwendet wird, liegt die Lösung der Metrikgleichungen ebenfalls zwischen der Minkowski-Metrik und der TOV-Lösung. Wenn als Startwert die TOV-Lösung verwendet wird, divergiert die Lösung oder konvergiert zu der gleichen Lösung, wie mit der Minkowski-Metrik als Startwert. Die bekannten Randbedingungen für die Metrik (3.46) werden nicht eingehalten.
- *Abgewandelte Green-Methode*: Durch Einbeziehen der Randbedingungen für die Metrik (Abschnitt 3.3.4) wird die TOV-Lösung erhalten, unabhängig vom Startwert für die Iteration.

Für jede Methode wird dabei die Gleichung $\Delta u^k = f^k$ auf ihre Erfüllung überprüft. Hierzu wird das Residuum der Metrikgleichungen

$$|\Delta u^k / f^k - 1| \tag{3.60}$$

untersucht, das ein relatives Maß für die Genauigkeit der Lösung darstellt. Betrachtet man jede Methode für sich, hängt das Residuum nur unwesentlich davon ab, ob die korrekte TOV-Lösung erhalten wird, oder eine andere, davon abweichende Lösung (Abb. 3.4). Es gibt also zwei unterschiedliche Lösungen, die die Metrikgleichungen $\Delta u^k = f^k$ mit der gleichen relativen Genauigkeit erfüllen. Die Eindeutigkeit der Lösung ist daher nicht gegeben, es liegt eine Entartung vor. Die Entartung muss von der Nichtlinearität der Metrikgleichungen herrühren; denn für die lineare Poisson-Gleichung der Newtonschen Gravitationstheorie $\Delta \phi_{\text{grav}} = -4\pi\rho$ gibt es den Nachweis der Eindeutigkeit bei gegebener Randbedingung $\phi_{\text{grav}}|_{\mathcal{F}}$ auf einer geschlossenen Fläche \mathcal{F} (*Dirichlet-Problem*) [28].

Wenn man die Lösung für den konformen Faktor aus der Newton-Methode mit der TOV-Lösung vergleicht (Abb. 3.3), fällt auf, dass zwar die Randbedingungen übereinstimmen, nicht aber die radialen Ableitungen. Deshalb wäre es eine Möglichkeit die Poisson-Gleichung für den konformen Faktor ϕ (3.36) umzuschreiben in eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, die mit einem Runge-Kutta-Verfahren nach dem Radius vom Rand $r = R_G$ ausgehend bis zum Zentrum integriert werden kann. Das ist allerdings nur für sphärisch symmetrische Modelle möglich (ansonsten treten auch Ableitungen nach θ auf, womit eine partielle Differentialgleichung vorliegt). Bei der Lösung mit der Green-Methode ist dagegen die Randbedingung von ϕ nicht identisch mit der TOV-Lösung (Abb. 3.3). Durch den Einbau der Randbedingung für ϕ in die Green-Methode konnte die Entartung aufgehoben werden (Abschnitt 3.3.4). Diese abgewandelte Green-Methode habe ich daher für alle Rechnungen mit dem Hydrodynamikprogramm benutzt (bis auf den rotierenden extrem massereichen Stern).

3.3.4 Abgewandelte Green-Methode

Um die Entartung der Metrikgleichungen aufzuheben, habe ich eine abgewandelte Version der Green-Methode eingeführt. Ziel war es, die Randbedingungen der isotropen Schwarzschildmetrik (3.46) zu verwenden, da bei der Metrikberechnung der statischen Neutronensterne diese Randbedingung verletzt wurden, obwohl sie für diesen Fall exakt erfüllt sein müssen (Abschnitt 3.3.3). Die Randbedingungen werden bei der Green-Methode für das innere Potential Φ_{in} bei $r = 0$ und für das äussere Potential Φ_{au} bei $r = R_G$ vorgegeben (3.58). Für das äussere Potential gilt dabei $\Phi_{\text{au}}^{(l)}(r = R_G) = 0$. Wenn man für das innere Potential am Gitterradius die Randbedingungen der isotropen Schwarzschildmetrik fordert, werden diese Bedingungen exakt durch den Lösungsvektor u^k eingehalten. So z.B. erhält man die Randbedingungen für das innere Potential des konformen Faktors zu:

$$\Phi_{\text{in}}^{(0)}\Big|_{R_G} = -\frac{1}{2\pi} \phi|_{R_G}, \quad \Phi_{\text{in}}^{(l)}\Big|_{R_G} = 0 \quad (l \neq 0). \quad (3.61)$$

Damit ergibt sich der Lösungsvektor am Gitterradius bei Berücksichtigung von $P^{(0)} = 1$ aus (3.50) zu:

$$u^1(R_G, \theta) = \phi|_{R_G}. \quad (3.62)$$

Die Einhaltung der isotropen Randbedingungen ist damit garantiert. Um das innere Potential zu berechnen, wird bei der Green-Methode die Rekursionsformel (3.56) benutzt, wobei man das innere Potential $\Phi_{\text{in},i+1}$ beim Radius r_{i+1} aus $\Phi_{\text{in},i}$ beim Radius r_i gewinnen kann. Bei Vorgabe

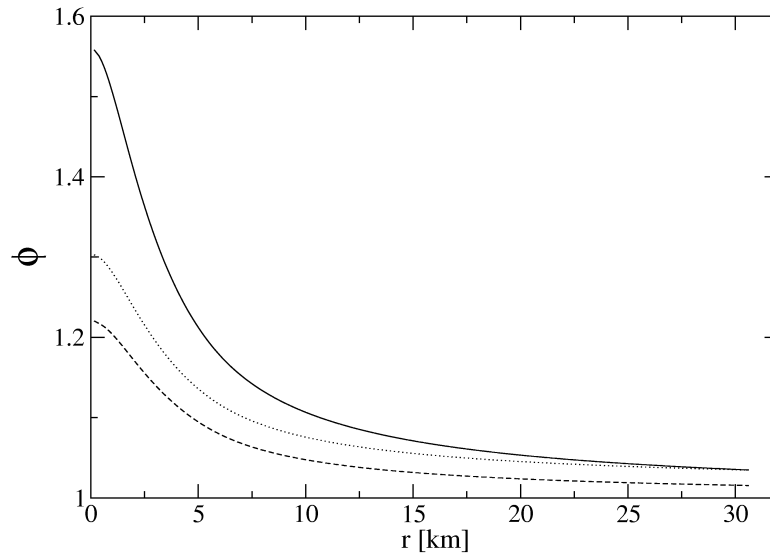


Abbildung 3.3: Radiales Profil des konformen Faktors ϕ eines sphärischen Neutronensterns mit einer Zentralsdichte $\rho_z = 4,905 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ aus der TOV-Lösung (durchgezogene Linie), der Newton-Methode (gepunktete Linie) und der Green-Methode (gestrichelte Linie). Ein Vergleich zwischen TOV-Lösung und Newton-Methode zeigt, dass zwar die Randwerte übereinstimmen, nicht aber die radialen Ableitungen. Der Randwert der Green-Methode weicht deutlich von dem der TOV-Lösung ab.

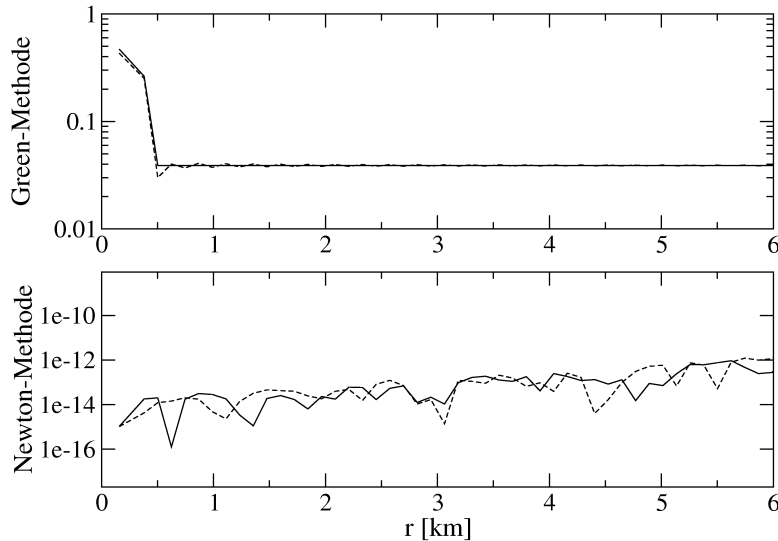


Abbildung 3.4: Aufgetragen ist das radiale Profil für das Residuum $|\Delta u^1/f^1 - 1|$ des konformen Faktors jeweils für die Green-Methode (oben) und die Newton Methode (unten). Die durchgezogene Linie ist das Residuum der Lösung, die von der TOV-Lösung abweicht, die gestrichelte Linie ist das Residuum der Metriklösung, die identisch zur TOV-Lösung ist. Bei der Green-Methode wurde die TOV-Lösung mit der abgewandelten Green-Methode erhalten, bei der Newton-Methode durch das Einlesen der TOV-Lösung als Startwert (vgl. Text).

der äusseren Randbedingung (3.61) muss die Rekursionsformel so umgeschrieben werden, dass man $\Phi_{\text{in},i-1}$ aus $\Phi_{\text{in},i}$ gewinnen kann:

$$\Phi_{\text{in},i-1}^{(l)} = \frac{1}{r_i^{l+1}} \left(\Phi_{\text{in},i}^{(l)} r_i^{l+1} + R_{\text{in},i-1/2}^{(l)} \sum_{p=1}^{n_\theta} T_p^{(l)} F_{ip} \right). \quad (3.63)$$

Durch das Verwenden einer äusseren Randbedingung für das innere Potential, ist damit allerdings nicht mehr $\Phi_{\text{in}}(r=0) = 0$ sichergestellt. Um die innere Randbedingung einzuhalten, wird das innere Potential für die innersten Gitterpunkte extrapoliert. Als Vorgehensweise habe ich folgendes gewählt:

1. Die äußere Randbedingung für das innere Potential wird nur für den konformen Faktor ($k=1$) benutzt, die übrigen Metrikgleichungen werden mit den alten Randbedingungen gelöst.
2. Durch Vorgabe von $\Phi_{\text{in}}(R_G)$ lässt sich mit der Rekursionsformel (3.63) das innere Potential aller Gitterpunkte bestimmen.
3. Für die innersten Gitterpunkte wird das Potential parabolisch extrapoliert, damit $\Phi_{\text{in}}(r=0) = 0$ gilt.
4. Die Quellen F_{ip} werden erneut bestimmt und Φ_{in} wird noch einmal mit innerer Randbedingung aus der Rekursion (3.56) bestimmt.
5. Der Lösungsvektor u^1 für den konformen Faktor wird aus (3.50) erhalten.

Abb. 3.2 zeigt radiale Profile, des äusseren Potentials und des inneren Potentials am Beispiel eines extrem massereichen Sterns. Das innere Potential wurde einmal mit äußerer Randbedingung und innerer (für $r \rightarrow 0$) Extrapolation und einmal mit innerer Randbedingung berechnet. Da für $r \rightarrow 0$ gilt $\Phi_{\text{in}} \ll \Phi_{\text{au}}$, ist der Einfluss der Extrapolation auf den Lösungsvektor u^1 gering. Ich habe bei allen Berechnungen, wenn nicht extra erwähnt, die abgewandelte Green-Methode verwendet.

3.4 Zustandsgleichung

Für die hydrodynamischen Gleichungen wird als Schließbedingung noch die Zustandsgleichung $P(\rho, \epsilon)$ benötigt. Hier gibt es nun mehrere Möglichkeiten:

- Die Polytropen-Zustandsgleichung (2.4). Hierbei reduziert sich die Zustandsgleichung zu $P(\rho)$, d.h. der Druck ist nicht mehr abhängig von der inneren Energie. Daher muss die innere Energie nicht mehr zeitlich entwickelt werden. Nachteil: In Stoßwellen wandelt sich ein Teil der kinetischen Energie in Entropie um, was unberücksichtigt bleibt. Diese Zustandsgleichung wurde nur für den adiabatischen Fall bei der Migration von Neutronensternen benutzt (Abschnitt 4.2.2).
- Die Zustandsgleichung für ein ideales Gas: $P(\rho, \epsilon) = (\Gamma_1 - 1)\epsilon\rho$. In Abwesenheit von Stoßwellen ist sie identisch zur Polytropen Zustandsgleichung. Die Energieumwandlung in Stoßwellen wird berücksichtigt. Ich habe sie für Testrechnungen mit Neutronensternen verwendet.
- Eine analytische Zustandsgleichung mit Strahlungs- und Gasdruck, zum Vergleich mit der tabellierten Zustandsgleichung.
- Eine tabellierte Zustandsgleichung, die den Strahlungsdruck und die Bildung von Elektron-Positron-Paaren berücksichtigt. Der Gasdruck wird noch zusätzlich hinzuaddiert.
- Die Bildung von Neutrinos verursacht einen Energieverlust, der bei der Berechnung der inneren Energie berücksichtigt wird (Gewinnung der primitiven Variablen, Abschnitt 3.4.4).

3.4.1 Strahlungs- und Gasdruck

Der Druck P und die spezifische innere Energie pro Masse ϵ lassen sich für die Zustandsgleichung von Strahlungs- und Gasdruck als analytische Funktionen der Dichte ρ und der Temperatur T schreiben:

$$P = P_s + P_g = \frac{1}{3}aT^4 + \frac{\Re\rho T}{\mu}, \quad (3.64)$$

$$\epsilon = \epsilon_s + \epsilon_g = \frac{1}{\rho}aT^4 + \frac{3}{2}\frac{\Re T}{\mu}. \quad (3.65)$$

Für die Auswertung der Zustandsgleichung wird die Funktion $P(\rho, \epsilon)$ benötigt. Da sich $P(\rho, T)$ und $\epsilon(\rho, T)$ nicht direkt auf diese Form bringen lassen, muss zunächst die Temperatur T bestimmt werden (Abschnitt 3.4.2). Die massenspezifische Entropie s ergibt sich aus der Integration des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik (2.5). Die Summe der Entropie von Strahlungs- und Gasanteil ergibt:

$$s = s_s + s_g = \frac{4aT^3}{3\rho} + \frac{\Re}{\mu} \ln \left(\frac{T^{\frac{3}{2}}}{\rho} \right) + \text{konst.} \quad (3.66)$$

Die Konstante ergibt sich nicht aus der klassischen Betrachtung der Entropie, sondern muss aus der quantenmechanischen Abzählung im Phasenraum gewonnen werden. Da ich die Betrachtung der Entropie dazu nutze, den adiabatischen Kollaps zu verifizieren (Kapitel 4.1), und nur die relative Änderung von Bedeutung ist, habe ich darauf verzichtet.

3.4.2 Elektron-Positron-Paare

Während des Kollapses wird die Temperatur für die Paarbildungsschwelle für Elektron-Positron-Paare $T_{e^\pm} \approx 5 \times 10^8$ K überschritten. Daher habe ich eine tabellierte Zustandsgleichung benutzt, die sowohl den Photonendruck als auch die e^\pm Paare geeignet berücksichtigt. Aus der Tabelle ergibt sich mit Hilfe einer zweidimensionalen Interpolationsroutine der Druck $P_{\gamma e^\pm}(\rho, T)$, die spezifische innere Energie $\epsilon_{\gamma e^\pm}(\rho, T)$ und die spezifische Entropie pro Masse $s_{\gamma e^\pm}(\rho, T)$ als Funktionen von Dichte und Temperatur sowie die jeweiligen Ableitungen nach ρ und T . Das Hinzuaddieren des Gasanteils ergibt schließlich:

$$P(\rho, T) = P_{\gamma e^\pm}(\rho, T) + P_g(\rho, T) \quad (3.67)$$

$$\epsilon(\rho, T) = \epsilon_{\gamma e^\pm}(\rho, T) + \epsilon_g(\rho, T) \quad (3.68)$$

$$s(\rho, T) = s_{\gamma e^\pm}(\rho, T) + s_g(\rho, T) \quad (3.69)$$

Sowohl bei der analytischen Zustandsgleichung von Strahlungs- und Gasdruck als auch bei der Tabellen-Zustandsgleichung ist der Druck nicht in der Form $P(\rho, \epsilon)$ gegeben, sondern als $P(\rho, T)$. Daher muss bei vorgegebener Dichte ρ und innerer Energie ϵ zunächst die Temperatur T bestimmt werden [35]. Dazu löst man mit Hilfe einer Newton-Iteration die Gleichung $\epsilon^*(\rho, T) - \epsilon = 0$. Die Iterationsvorschrift lautet dann:

$$T^{n+1} = T^n - \frac{\epsilon^*(\rho, T) - \epsilon}{\left. \frac{\partial \epsilon^*(\rho, T)}{\partial T} \right|_{(\rho, T^n)}}. \quad (3.70)$$

Wichtig zur Lösung der Hydrodynamik-Gleichungen ist die Schallgeschwindigkeit c_s so wie die Größen χ und κ . Sie können vollständig durch die partiellen Ableitungen von $p(\rho, T)$ und $\epsilon(\rho, T)$ ausgedrückt werden (siehe Anhang A.1):

$$c_s^2 \equiv \frac{1}{h} \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s = \frac{1}{h} \left\{ \chi + \kappa \frac{P}{\rho^2} \right\}, \quad (3.71)$$

$$\chi \equiv \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_\epsilon = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_T - \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_\rho \frac{\left. \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right|_T}{\left. \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right|_\rho}, \quad (3.72)$$

$$\kappa \equiv \left. \frac{\partial P}{\partial \epsilon} \right|_\rho = \frac{\left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_\rho}{\left. \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right|_\rho}. \quad (3.73)$$

Der adiabatische Index Γ_1 ergibt sich sofort aus der Schallgeschwindigkeit:

$$\Gamma_1 = h c_s^2 \frac{\rho}{P}. \quad (3.74)$$

3.4.3 Thermische Neutrino-Emission

In der Endphase des Kollapses eines extrem massereichen Sterns wird neben der Bildung von Elektron-Positron-Paaren auch die von Neutrino-Antineutrino-Paaren bedeutsam. Falls keine schwereren Kerne als Helium vorhanden sind, haben folgende drei Prozesse die größte Bedeutung [8]:

- **Paarvernichtung:** Die Elektron-Positron-Annihilation in ein Photonenpaar $\gamma\gamma$ ist ein wohlbekannter Prozess. Um einen Faktor 10^{19} geringer ist die Zerfallswahrscheinlichkeit in ein Neutrino-Antineutrino-Paar: $e^- + e^+ \rightarrow \nu + \bar{\nu}$. Für extrem massereiche Sterne am unteren Ende des Massenbereiches von $10^6 M_\odot$ bis $10^{9,5} M_\odot$ ist dieser Prozess dominierend.
- **Plasma-Neutrinos:** $\gamma_{\text{plasmon}} \rightarrow \nu + \bar{\nu}$. Im Vakuum ist ein solcher Zerfall eines Photons selbst dann nicht erlaubt, wenn die Neutrinos keine Ruhemasse besitzen. Da Neutrinos linkshändig sind (Impuls und Spin entgegengerichtet), müssen sie um den Spin des Photons zu erhalten in entgegengesetzte Richtungen emittiert werden (im Ruhesystem des Photons). Damit wäre aber die Energie- und Impulserhaltung verletzt. Durch die Wechselwirkung der elektromagnetischen Welle mit den umgebenden Elektronen, kann man das Photon als ein Quasiteilchen mit einer Ruhemasse betrachten, das aus der Festkörperphysik bekannte Plasmon. Daher ist der Zerfall möglich, ohne die Energie-Impulserhaltung zu verletzen.
- **Photo-Neutrinos:** $\gamma + e^\pm \rightarrow e^\pm + \nu + \bar{\nu}$ ist in Analogie zur Compton-Streuung möglich, nur mit dem Unterschied, dass das gestreute Photon durch ein Neutrino-Antineutrino-Paar ersetzt wird. Der Photo-Neutrino-Prozess ist nur dann bedeutsam, wenn 1) die Temperatur zu gering ist, um genügend Elektron-Positron-Paare für die Paarvernichtung zu erzeugen, oder 2) die Dichten (und damit die Elektronendichte) so gering ist, dass die entsprechend kleine Ruhemasse des Plasmons eine Unterdrückung des Plasmonzerfalls hervorruft.

Für die Berechnung der Paarneutrinos und der Plasmaneutrinos habe ich Näherungsformeln aus [25] und [41] verwendet. Die Berechnung der Photoneutrinos geschah mit Hilfe einer Tabelle aus [27]. Die volumenspezifische Energiedichte Q_ν wird dabei jeweils in Abhängigkeit von Temperatur, Dichte und dem molekularen Elektronengewicht μ (bei meinen Rechnungen ist $\mu = 0,5$) erhalten. Die Neutrinos verlassen wegen des extrem kleinen Wirkungsquerschnittes den Stern nahezu vollständig ohne weitere Wechselwirkung, wie von Linke [36] nachgewiesen wurde. Man kann sie daher einfach als Energiesenke betrachten und muss sie entsprechend zur inneren Energie hinzufügen (Abschnitt 3.4.4).

3.4.4 Rückgewinnung der primitiven Variablen

Für die Rekonstruktion (Abschnitt 3.2.2) müssen die primitiven Variablen (ρ, v_i, ϵ) aus den erhaltenen Variablen (D, S_i, τ) gewonnen werden. Aus der Definition der erhaltenen Variablen (3.15–3.17) und des Lorentzfaktors (3.18) erhält man einen Satz von Gleichungen, der die

eindeutige Umwandlung möglich macht [11]:

$$v_i = \frac{S_i}{\tau + D + P}, \quad W = \frac{1}{\sqrt{1 - v_i v^i}}, \quad \rho = \frac{D}{W}, \quad \epsilon = \frac{\tau + D(1 - W) + P(1 - W^2)}{DW}. \quad (3.75)$$

Falls die Neutrinoemission berechnet wird, muss die massenspezifische Energiedichte der Neutrinos q_ν von der inneren Energie abgezogen werden. Zusätzlich benötigt man noch die Zustandsgleichung (*Equation Of State*) $P^{\text{EOS}}(\rho, \epsilon)$, die das System schließt. Zur Lösung wird die Nullstelle der Funktion $f(P) = P^{\text{EOS}}(\rho(P), \epsilon(P)) - P$ gesucht. Mit Hilfe einer Newton-Raphson-Iteration erhält man die Iterationsvorschrift:

$$P^{i+1} = P^i - \frac{df(P)}{dP}, \quad (3.76)$$

mit der Identität (siehe Anhang A.2):

$$\frac{df(P)}{dP} = c_s^2 v_i v^i - 1. \quad (3.77)$$

Die Schallgeschwindigkeit c_s ergibt sich aus Gleichung (3.71). Innerhalb der Druck-Iteration ist noch die Temperatur-Iteration eingebettet, falls die analytische Zustandsgleichung oder die Tabellenzustandsgleichung benutzt wird.

3.4.5 Atmosphäre

Verfahren mit finiten Volumen können Dichten mit $\rho = 0$ nicht verarbeiten. Für einen sphärisch symmetrischen Kollaps, könnte man einfach den Gitterradius bei einer nicht zu kleinen Dichte setzen, man würde nur einen sehr geringen Teil der Sternmasse verlieren. Wegen der Abflachung ist das bei rotierenden Modellen nicht möglich, da man einen zu großen Teil des Sterns abschneiden müsste. Daher wird im Raum ausserhalb des Sterns bis zum Gitterradius eine Atmosphäre berechnet, in der die Dichte auf eine konstante Atmosphärendichte gesetzt wird, falls sie einen Schwellenwert unterschreitet. Der Schwellenwert ρ_s wird in Relation zur maximalen Dichte ρ_{max} (Zentraldichte) des Anfangsmodells festgelegt. Die Atmosphärendichte ρ_a wird nochmal in Relation zum Schwellenwert reduziert:

$$\rho_s = f_s \rho_{\text{max}}, \quad \rho_a = f_a \rho_s, \quad (3.78)$$

mit $f_s = 10^{-5} \dots 10^{-3}$ und $f_a = 10^{-5} \dots 10^{-3}$. Um den Druck zu bestimmen, wird die Polytrope-Zustandsgleichung verwendet, die innere Energie ergibt sich aus der Zustandsgleichung des idealen Gases. Dabei werden Polytropenexponent und Polytropenkonstante so gewählt wie beim Anfangsmodell. Ausserdem werden die Geschwindigkeiten auf Null gesetzt: $v^i = 0$. Damit sind die zur Rekonstruktion erforderlichen primitiven Variablen bekannt und die Hydrogleichungen können auch in der Atmosphäre gelöst werden. Die Atmosphäre wird jeden Zeitschritt neu gesetzt. Dazu werden die erhaltenen Variablen bestimmt und daraus die Dichte, die mit dem Schwellenwert verglichen wird. Damit stellt man sicher, dass der Stern sich auch ausdehnen kann.

3.5 Anfangsmodelle

In Abschnitt 2.1 habe ich dargelegt, warum extrem massereiche Sterne als 4/3-Polytrope beschrieben werden können. Das gilt zumindest bis zum Einsetzen der Instabilität. In Abschnitt 2.3.4 habe ich gezeigt, warum die Entwicklung bis zum Erreichen des kritischen Punktes quasistatisch ist. Daher kann man als Anfangsmodelle statische 4/3-Polytrope für die nichtrotierenden Modelle konstruieren ($v^i = 0$) und für die rotierenden Modelle entsprechend stationäre 4/3-Polytrope ($v^3 \neq 0$). Die Polytropenkonstante wird mit der Gleichung (2.24) aus der Ruhemasse M bestimmt. Um die Randbedingungen für die Metrikgleichungen zu erhalten, wird jeweils die gravitierende Gesamtmasse M_{grav} bestimmt, welche die Randbedingungen (3.46) für die Metrik festlegt.

3.5.1 Sphärische Modelle

Für einen statischen Stern sind die räumlichen Komponenten der Vierergeschwindigkeit identisch Null, $u^i = 0$. Da die Dichte- und Druckverteilung sphärisch symmetrisch sind, ist der Energie-Impuls-Tensor (3.9) statisch und sphärisch. Mit den Standard-Schwarzschildkoordinaten erhält man folgenden Ansatz für das Linienelement einer sphärischen und statischen Materieverteilung:

$$ds^2 = -\hat{B}(\hat{r})d\hat{t}^2 + \hat{A}(\hat{r})d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3.79)$$

Die Einsteinschen Feldgleichungen ergeben die Koeffizienten für das Linienelement (3.79) im Innenraum des Sterns ($\hat{r} < \hat{R}$) zu [18]:

$$\hat{A}(\hat{r}) = \left[1 - \frac{2m_{\text{grav}}(\hat{r})}{\hat{r}}\right]^{-1}, \quad \hat{B}(\hat{r}) = \exp \left\{ -2 \int_{\hat{r}}^{\infty} \frac{d\hat{r}'}{\hat{r}'^2} \frac{m_{\text{grav}}(\hat{r}') + 4\pi\hat{r}'^3 P(\hat{r}')}{1 - 2m_{\text{grav}}(\hat{r}')/\hat{r}'} \right\}. \quad (3.80)$$

Die gravitierende Masse innerhalb des Radius \hat{r} ist dabei gegeben durch:

$$m_{\text{grav}}(\hat{r}) = 4\pi \int_0^{\hat{r}} d\hat{r}' \hat{r}'^2 \rho(\hat{r}') [1 + \epsilon(\hat{r}')]. \quad (3.81)$$

Es handelt sich dabei nicht um ein einfaches Volumenintegral, denn in Standard-Schwarzschildkoordinaten ist das Volumenelement gegeben durch:

$$d\hat{V} = \sqrt{\hat{A}(\hat{r})} \cdot 4\pi\hat{r}^2 d\hat{r}. \quad (3.82)$$

Ausserdem wird die innere Energie ϵ mit in die Berechnung der gravitierenden Masse einbezogen, denn in der Allgemeinen Relativitätstheorie trägt neben der Ruhemassendichte auch die Energiedichte zur Gravitation bei. Wenn man die Koeffizienten (3.80) in das Linienelement (3.79) einsetzt, erhält man die *innere Schwarzschildmetrik*, die im Aussenraum des Sterns ($\hat{r} > \hat{R}$) stetig durch die äußere Schwarzschildmetrik (3.41) angeschlossen wird. Aus den Erhaltungsgleichungen (3.11) für den Energie-Impuls-Tensor erhält man die *Tolmann-Oppenheimer-Volkoff (TOV)* -Gleichung [18]:

$$\frac{dP}{d\hat{r}} = -\frac{m_{\text{grav}}(\hat{r})\rho(\hat{r})}{\hat{r}^2} \left[1 + \frac{P(\hat{r})}{\rho(\hat{r})}\right] \left[1 + \frac{4\pi\hat{r}^3 P(\hat{r})}{m_{\text{grav}}(\hat{r})}\right] \left[1 - \frac{2m_{\text{grav}}(\hat{r})}{\hat{r}}\right]^{-1}. \quad (3.83)$$

Mit Hilfe der TOV-Gleichung kann man auf einfache Art ein sphärisches und statisches allgemeinrelativistisches Sternmodell konstruieren [48]:

1. Man wähle eine Zentraldichte ρ_z . Mit der Zustandsgleichung des Polytropes erhält man den Zentraldruck P_z . Die innere Randbedingung für die Masse ist $m_{\text{grav}}(\hat{r} = 0) = 0$.
2. Man integriert mit Hilfe eines Runge-Kutta-Verfahrens (3.81) und (3.83) von $\hat{r} = 0$ aus. Für jeden Schritt erhält man einen neuen Wert für P und aus der Polytropengleichung den zugehörigen Wert für ρ . Die innere Energie erhält man dabei aus der Zustandsgleichung für das ideale Gas.
3. Der Wert $\hat{r} = \hat{R}$, wo für den Druck $P = 0$ gilt, definiert den Sternradius, wo die Integration beendet wird. Die gravitierende Gesamtmasse ist durch $M_{\text{grav}} = m_{\text{grav}}(\hat{R})$ gegeben.

Aus der Integration der TOV-Gleichung erhält man die Dichte $\rho(\hat{r})$ als Funktion des Standard-Schwarzschildradius. Um die Standard-Schwarzschildkoordinaten auf isotrope Koordinaten zu transformieren, wird ein Ansatz für das Linienelement in isotropen Koordinaten für den statischen Fall benötigt. Für sphärische Sterne sind die Verschiebungsvektoren identisch Null (Abschnitt 3.3). Das führt zu einer Vereinfachung des allgemeinen Linienelements (3.8):

$$ds^2 = -\alpha(r)^2 dt^2 + \phi(r)^4 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.84)$$

Um die Standard-Schwarzschildkoordinaten auf isotrope Koordinaten umzutransformieren, vergleicht man das Linienelement (3.79) mit (3.84). Daraus erhält man folgende Beziehungen:

$$\hat{B}(\hat{r}) = \alpha(r)^2, \quad \hat{A}(\hat{r}) d\hat{r}^2 = \phi(r)^4 dr^2, \quad \hat{r}^2 = \phi(r)^4 r^2. \quad (3.85)$$

Damit erhält man den isotropen Radius als Funktion des Standard-Schwarzschildradius

$$r(\hat{r}) = \exp \left\{ \int_0^{\hat{r}} \frac{d\hat{r}'}{\hat{r}'} \sqrt{\hat{A}(\hat{r}')} \right\}, \quad (3.86)$$

und durch nochmaliges Anwenden von (3.85) ergibt sich $\phi(r)$. Um Größen von isotropen Koordinaten auf Standard-Schwarzschildkoordinaten umzutransformieren, bestimmt man noch die Umkehrfunktion $\hat{r}(r)$. Die Zeitdehnungsfunktion $\alpha(r)$ erhält man ebenfalls aus (3.85), und die Dichte wird umtransformiert zu $\rho(r) = \rho(\hat{r}(r))$. Das Dichteprofil $\rho(r)$ ist dabei als Anfangsmodell ausreichend, denn Druck und innere Energie lassen sich aus der Polytropengleichung bestimmen.

3.5.2 Rotierende Modelle

Die Berechnung der rotierenden Gleichgewichtsmodelle folgt der Methode aus [30, 31], deren wichtigste Elemente ich kurz wiederholen möchte. Für eine achsen- und äquatorialsymmetrische Materieverteilung im Gleichgewicht nimmt das Linienelement in Kugelkoordinaten (t, r, θ, ϕ) mit den metrischen Funktionen α , ϕ , $\hat{\alpha}$ und ω folgende allgemeine Form an:

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + e^{2\hat{\alpha}} (dr^2 + r^2 d\theta^2) + \phi^4 r^2 \sin^2 \theta (d\phi - \omega dt)^2. \quad (3.87)$$

Aus der allgemeinrelativistischen Verallgemeinerung der hydrostatischen Gleichgewichtsgleichung erhält man die Gleichgewichtsverteilung der hydrodynamischen Größen. Daraus gewinnt man den Energie-Impuls-Tensor, womit sich durch Einsetzen in die Einsteinschen Feldgleichungen vier gekoppelte elliptische Differentialgleichungen für die vier Metrik-Funktionen ergeben. Um sowohl gleichförmige (starre) als auch differentielle Rotation beschreiben zu können, wird üblicherweise ein Rotationsgesetz

$$\Omega = \frac{\Omega_z}{1 + \frac{d^2}{A^2}} \quad (3.88)$$

verwendet, wobei Ω_z die Winkelgeschwindigkeit im Zentrum, $d = r \sin \theta$ der Abstand von der Rotationsachse und A ein Längenparameter ist. Je größer A wird, desto mehr nähert man sich der gleichförmigen Rotation an. Zur Lösung gelangt man schließlich iterativ mit der *selbstkonsistenten Feldmethode nach Hachisu* [30]. Hierbei wird die Zentralsdichte ρ_z und der Rotationsparameter A vorgegeben. Durch die Vorgabe von zwei Punkten am Rand des Sterns (Pol und Äquator) lässt sich das Verhältnis von polaren Radius zu äquatorialen Radius R_p/R_a fixieren. Ein dritter Punkt bei der maximalen Dichte wird ebenfalls benötigt. Man startet mit der analytischen TOV-Lösung mit konstanter Dichte $\rho = \rho_z = \text{konst.}$ und iteriert sich zur Gleichgewichtslösung hin. Da näherungsweise $e^{2\hat{\alpha}} = \phi^4$ gilt [11], liegt das Linienelement (3.87) schon in isotroper vor. Als gravitierende Gesamtmasse ergibt sich für die rotierenden Anfangsmodelle:

$$M_{\text{grav}} = -2\pi \int dr d\theta r^2 \sin \theta \phi^6 [\alpha(2\rho h W^2 + 2P - \rho h) - 2\rho h W^2 v_i \beta^i]. \quad (3.89)$$

Kapitel 4

Testrechnungen

4.1 Erhaltene Größen

Während der hydrodynamischen Entwicklung gibt es einige Größen, die erhalten sein müssen. So folgt aus der Erhaltungsgleichung (3.21) für die Erhaltungsgröße $D = \rho W$, dass das Volumenintegral über D erhalten sein muss, wenn es keine Flüsse über den Rand des Gitters gibt. Da für $W = 1$ dieses Integral der Ruhemasse entspricht und die Ruhemasse tatsächlich eine Erhaltungsgröße sein sollte, wird die Ruhemasse definiert als:

$$M_{\text{ruhe}} = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{R_G} dr r^2 \phi^6 \rho W. \quad (4.1)$$

Da ausserhalb des Sterns $\rho = 0$ gilt, ist es ausreichend bis zum Gitterradius R_G zu integrieren; eine Integration bis $r = \infty$ ist nicht erforderlich. Der Integrand für die Ruhemasse hat einen kompakten Support. Die Ruhemasse ist identisch zu der Masse M , die ich in Kapitel 2 benutzt habe, nur dass M_{ruhe} als Erhaltungsgröße im Hydrocode berechnet wird, während M die Masse des Anfangsmodells festlegt. Eine weitere wichtige integrale Erhaltungsgröße ist die gravitierende Masse. Bei einem Kollaps ohne Abstrahlung von Gravitationswellen muss sie erhalten sein. Denn nach dem Birkhoff-Theorem bleibt die äußere Schwarzschild-Metrik zeitlich konstant bei einem sphärischen Stern und da diese Metrik allein durch die gravitierende Masse M_{grav} bestimmt wird, bleibt M_{grav} erhalten. Wenn der Stern nicht sphärisch symmetrisch ist, lässt sich bei genügend großem Abstand die Metrik durch die sphärische Schwarzschildlösung beschreiben. Das lässt sich mit Hilfe einer *Multipolentwicklung* einsehen. Für große Entfernungen überwiegt das Monopolmoment, während alle höheren Momente (Quadrupolmoment, ...) klein im Verhältnis zum Monopolmoment sind. Wenn sich die Metrik alleine durch das Monopolmoment beschreiben lässt, kann man umgekehrt daraus die gravitierende Masse bestimmen. Dabei kann man entweder das Monopolmoment für ϕ oder für α verwenden. Aus der Metrikgleichung (3.36) erhält man das Monopolmoment für ϕ , nämlich durch Integration:

$$\phi(r) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty dr' \frac{r'^2 \phi'^5}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left(\rho h W^2 - P + \frac{K_{ij} K^{ij}}{16\pi} \right) + \text{konst.}, \quad (4.2)$$

wobei die Green-Funktion (3.47) des Laplace-Operators verwendet wurde. Falls man die Radiusintegration nur bis zum einem endlichen Radius, z.B. dem Gitterradius R_G , ausführt, lässt

sich der konforme Faktor für Radien ($r > R_G$) durch das Monopolmoment ausdrücken:

$$\phi(r) = \frac{1}{2r} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{R_G} dr r^2 \phi'^5 \left(\rho h W^2 - P + \frac{K_{ij} K^{ij}}{16\pi} \right) + \text{konst.} \quad (r > R_G). \quad (4.3)$$

Da im Aussenraum des Sterns ($r > R$), also auch für $r > R_G$, der konforme Faktor näherungsweise durch die isotrope Schwarzschildmetrik (3.45) gegeben ist, mit $\phi(r) = 1 + M_{\text{grav}}/(2r)$, erhält man die Konstante zu konst. = 1 und die gravitierende Masse zu:

$$M_{\text{grav}} = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{R_G} dr r^2 \phi^5 \left(\rho h W^2 - P + \frac{K_{ij} K^{ij}}{16\pi} \right), \quad (4.4)$$

wobei die Integration über φ wegen der Achsensymmetrie direkt ausgeführt wurde. Da die Verschiebungsvektoren β_i ausserhalb des Sterns verschieden von Null sein können (Abschnitt 3.3.1), ist die Größe $K_{ij} K^{ij}$ i.A. ebenfalls verschieden von Null, obwohl Druck und Dichte identisch Null sind. Daher ist eine Integration bis zum Gitterradius R_G eine Näherung; für das exakte Integral müsste bis $r = \infty$ integriert werden (wo auch die Metrik exakt durch die äußere Schwarzschildmetrik gegeben ist). Da jedoch die Verschiebungsvektoren ausserhalb des Sterns schnell abfallen (Abb. 3.1) und wegen $K_{ij} K^{ij}/16 \ll \rho h W^2 - P$ die gravitierende Masse (4.4) durch die Beiträge von Dichte und Druck dominiert wird, ist der Anteil, der durch das Abschneiden der Integration bei R_G verloren geht, im Verhältnis sehr gering. Daher ist diese Näherung berechtigt. Im Gegensatz zur Ruhemasse hat die gravitierende Masse keinen kompakten Support für das Integral. Neben den integralen Erhaltungsgrößen gibt es noch die spezifische Entropie. Sie muss erhalten sein, wenn der Kollaps adiabatisch verläuft, was der Fall ist, wenn die Neutrinoemission nicht bei der Berechnung der inneren Energie berücksichtigt wird.

Betrachten wir die bisher vorgestellten Erhaltungsgrößen am Fall eines adiabatischen Kollapses eines extrem massereichen Sterns mit $M = 10^6 M_\odot$ bei einer Auflösung von $n_r = 250$, $n_\theta = 4$, ohne Atmosphäre ($n_a = 0$). Der erste Gitterpunkt befindet sich bei einem Radius von $r_1 = 2 \times 10^9$ cm, wodurch die zentrale Auflösung festgelegt wird. Abb. 4.1 zeigt die Entropie pro Baryon als Funktion des Radius zu verschiedenen Zeitpunkten. Man erkennt, dass die Entropie bis auf die letzten drei Zeitpunkte in der zeitlichen Entwicklung sehr gut erhalten ist, bis auf das Gebiet in der Nähe des Sternrandes. Da am Sternrand die Dichte im Verhältnis zur mittleren Dichte gering ist, hat das aber keinen Einfluss auf die Dynamik des Kollapses. In den letzten Phasen des Kollapses, wenn die Bildung des Schwarzen Lochs kurz bevorsteht, verringert sich der Wert der zentralen Zeitdehnungsfunktion α_z , die am ersten Gitterpunkt bestimmt wird. Die Entropie ist nahezu erhalten bis $\alpha_z = 0,3$ erreicht wird, die Abweichungen sind kleiner als 5%, abgesehen vom Sternrand. Bei der weiteren Entwicklung nimmt die Abweichung jedoch schnell zu, insbesondere am ersten Gitterpunkt. Auf den Grund für diese Abweichungen gehe ich gleich ein.

Abb. 4.2 zeigt die Entwicklung der gravitierenden Masse M_{grav} des gleichen Kollapses. Zum Vergleich ist die Entwicklung der zentralen Zeitdehnungsfunktion α_z gezeigt. Man erkennt, dass in der Endphase des Kollapses für $\alpha_z \rightarrow 0$ die Verletzung von M_{grav} zunimmt; sie ist dabei geringer als 5%, solange $\alpha_z > 0,25$ gilt. Der Grund für die Verletzung der Erhaltung von Entropie und gravitierender Masse ist die mangelnde Auflösung im Zentrum, wenn der Sternradius immer kleiner wird. Da das Gitter sich nicht mitbewegt, sondern raumfest ist, überdeckt der Stern im Laufe des Kollapses eine immer kleinere Anzahl von Gitterpunkten. Zusätzlich wird

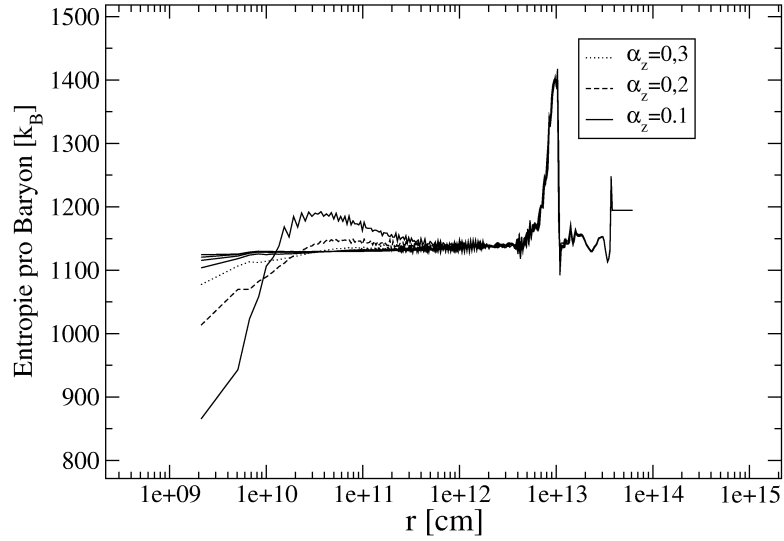


Abbildung 4.1: *Erhaltung der Entropie beim Kollaps eines extrem massereichen Sterns mit $M = 10^6 M_\odot$. Aufgetragen ist die Entropie pro Baryon als Funktion des Radius zu verschiedenen Zeitpunkten, wobei für die letzten drei Zeitpunkte in der Legende die zentrale Zeitdehnungsfunktion α_z angegeben ist. Die Entropie ist bis auf die letzten drei Zeitpunkte nahezu konstant im Stern, abgesehen vom Sternrand, mit $s_{\text{Baryon}} \approx 1150 k_B$ (Zum Verhalten der Entropie in der Nähe des Sternrandes siehe Text).*

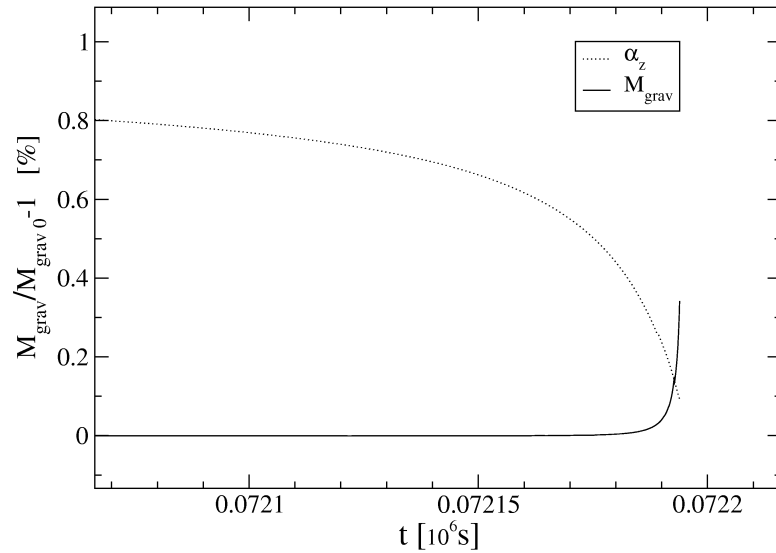


Abbildung 4.2: *Relative Änderung (in Prozent) der gravitierenden Masse als Funktion der Zeit beim gleichen Kollaps wie in Abb. 4.1 (durchgezogene Linie). Zum Vergleich ist die Entwicklung von α_z mit aufgetragen (gepunktete Linie).*

die Auflösung noch dadurch verringert, dass sich bei Annäherung an das Schwarze Loch der physikalische Abstand zweier Gitterpunkte in radialer Richtung schnell vergrößert, wodurch die Ausdehnung des Sterns, gemessen in Koordinatenradien, schnell kleiner wird. Diesen Effekt werde ich noch in Abschnitt 5.3.1 ausführlicher diskutieren. Am Ende der Simulation des Kollapses eines extrem massereichen Sternes ist der Großteil der Sternmaterie auf wenige Gitterpunkte im Zentrum verteilt, während die meisten äußeren Gitterpunkte sich in der Atmosphäre befinden und nicht mehr zu Auflösung der Kollapsdynamik beitragen können.

Durch eine erhöhte Auflösung im Zentrum (d.h. ein kleiner Radius r_1 der ersten Gitterzelle) lässt sich die Erhaltung der gravitierenden Masse verbessern. Abb. 4.3 zeigt die relative Änderung der gravitierenden Masse in Abhängigkeit der zentralen Zeitdehnungsfunktion für zwei verschiedene Auflösungen im Zentrum ($r_1 = 2 \times 10^9$ cm bzw. $r_1 = 7 \times 10^9$ cm). Die globale Auflösung beider Modelle ist identisch: $n_r = 250$, $n_\theta = 4$. Es ist zu erkennen, dass das Verhalten der relativen Änderung der gravitierenden Masse für beide Modelle ähnlich ist, mit dem Unterschied, dass bei höherer Zentralauflösung die Verletzung der Erhaltung der gravitierenden Masse erst bei kleineren α_z einsetzt. Je weiter man den Kollaps verfolgen möchte, je kleiner also α_z werden soll, desto kleiner muss der Radius der ersten Gitterzelle r_1 sein. Dabei ist allerdings zu beachten, dass eine Halbierung von r_1 auch zu einer Halbierung des Zeitschrittes und damit zu einer Verdopplung der gesamten Rechendauer führt (Abschnitt 3.2.2). Um diesen Nachteil zu vermeiden, wäre es eine Möglichkeit ein mitbewegtes Gitter zu verwenden [56].

Da beim Kollaps eines extrem massereichen Sterns keine Ruhemasse das Gitter am äusseren Rand verlässt (alle Materie fällt nach innen, es gibt keinen Rückprall), ist die Ruhemasse besser als 0,1% erhalten (Abb. 4.4). Die leichte Abnahme der Ruhemasse lässt sich mit dem Anwachsen der Atmosphäre begründen, wo die Dichte auf die Atmosphärendichte herabgesetzt wird (Abschnitt 3.4.5). Man beachte, dass die Erhaltung der Ruhemasse nicht von der Metriklösung abhängig ist, da die Quellen der Erhaltungsgleichung für D (3.20) unabhängig von der Metrik identisch Null sind.

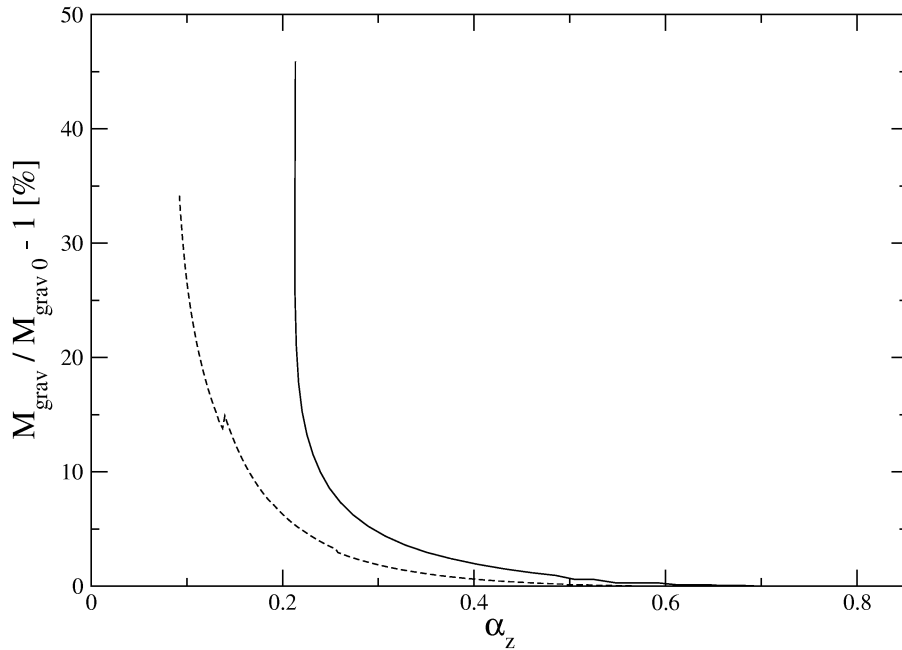


Abbildung 4.3: Die relative Änderung der gravitierenden Gesamtmasse als Funktion der zentralen Zeitdehnungsfunktion α_z für zwei Modelle mit einem Radius für den ersten Gitterpunkt von jeweils $r_1 = 7 \times 10^9$ cm (durchgezogene Linie) und $r_1 = 2 \times 10^9$ cm (gestrichelte Linie). Mit einer höheren Auflösung im Zentrum ist die Erhaltung der gravitierenden Gesamtmasse bei gleichem α_z besser. Dass die globale Auflösung beider Modelle identisch ist ($n_r = 250$, $n_\theta = 4$), zeigt, dass für den Kollaps zum Schwarzen Loch die zentrale Auflösung entscheidend ist.

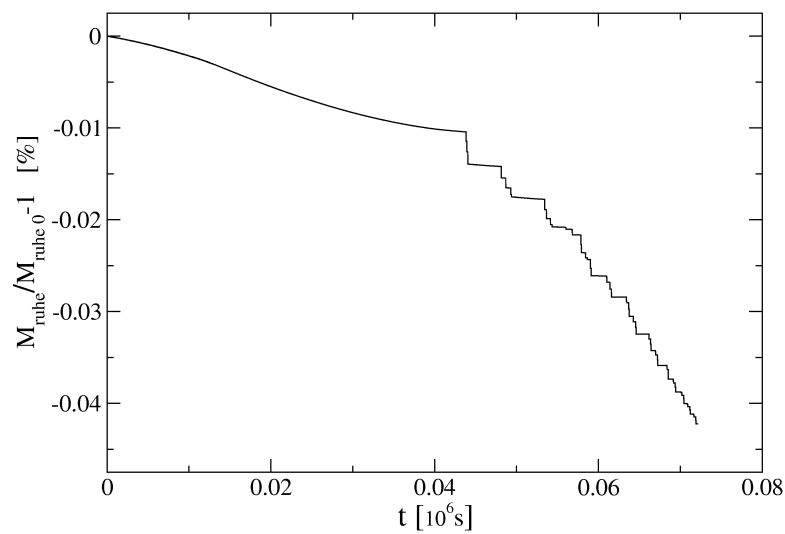


Abbildung 4.4: Die relative Änderung (in Prozent) der Ruhemasse für das Modell aus Abb. 4.1.

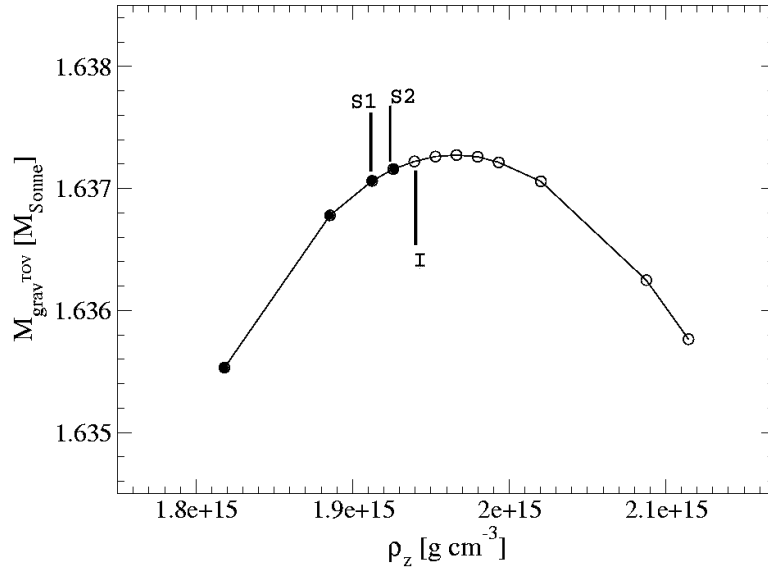


Abbildung 4.5: Gravitierende Masse (in Einheiten der Sonnenmasse) von sphärischen Neutronensternen in Abhängigkeit von der Zentraldichte ρ_z . Die Gleichgewichtsmodelle sind numerisch stabil (gefüllte Kreise), oder instabil (offene Kreise). Eingetragen sind die Modelle S1, S2 und I (vgl. Text).

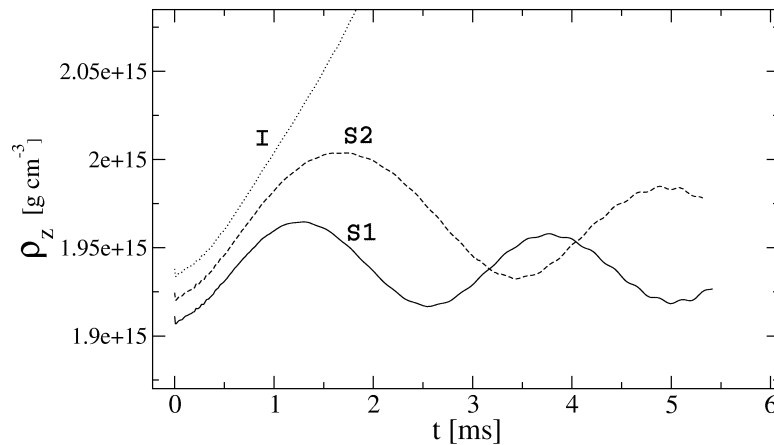


Abbildung 4.6: Zeitliche Entwicklung der Zentraldichte ρ_z von drei Neutronensternen. Das Modell mit der höchsten Zentraldichte (Modell I) ist (numerisch) instabil, es beginnt zu kollabieren. Die beiden anderen Modelle (Modell S1 und S2) sind (numerisch) stabil, sie beginnen infolge der Anfangsstörung zu schwingen (vgl. Abb. 4.5).

4.2 Neutronensterne

Da ich mit dem in Kapitel 3 vorgestellten Hydrodynamikprogramm den Kollaps zu einem Schwarzen Loch berechnen möchte, ist es erforderlich, das Programm für den Fall starker Gravitationsfelder zu testen. Hierzu bieten sich Neutronensterne an, die die kompakteste Form eines Sterns darstellen und starke Gravitationsfelder besitzen. Die Neutronensterne wurden dabei als Polytrope mit einem Polytropenexponenten $\Gamma = 2$ und einer Polytropenkonstante $K = 1,455 \times 10^5 \text{ g}^{-1} \text{ cm}^5 \text{ s}^{-2}$ approximiert. Die Tests habe ich alle mit sphärisch symmetrischen Neutronensternen durchgeführt, die mit der TOV-Gleichung (Abschnitt 3.5.1) konstruiert wurden.

4.2.1 Bestimmung der Stabilität

Wenn man die gravitierende Masse M_{grav} über der Zentraldichte aufträgt, erhält man eine Kurve (Abb. 4.5), aus der man die Stabilität eines Modells ablesen kann: Modelle mit $dM/d\rho_z > 0$ sind stabil, Modelle mit $dM/d\rho_z < 0$ sind instabil (Abschnitt 2.3.1). Die zum Maximum der gravitierenden Masse gehörende kritische Dichte $\rho_{\text{krit,N}}$ ist die maximale mögliche Dichte für stabile Neutronensterne. Die stabilen Neutronensterne befinden sich also auf dem linken Ast mit $\rho_z < \rho_{\text{krit,N}}$, die instabilen Neutronensterne auf dem rechten Ast mit $\rho_z > \rho_{\text{krit,N}}$. Instabile Neutronensterne befinden sich in einem labilen Gleichgewicht; schon kleine Störungen bewirken entweder einen Kollaps zu einem Schwarzen Loch oder eine Expansion zu einem stabilen Modell geringerer Dichte (Abschnitt 4.2.2), aber gleicher gravitierender Masse. Solche Störungen werden hervorgerufen, wenn die TOV-Lösung auf das Rechengitter des Hydrodynamikprogramms interpoliert wird. Je größer man dabei die Gitterauflösung wählt, desto geringer ist die Störung. Da stabile Modelle sehr nahe an der kritischen Dichte nur für sehr kleine Störungen stabil sind, ist zu erwarten, dass auch Modelle geringfügig unterhalb der kritischen Dichte numerisch instabil sind.

In Abb. 4.6 ist die zeitliche Entwicklung der Zentraldichte für drei Neutronensterne mit unterschiedlichen Zentraldichten ($1,912 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$, $1,926 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$, $1,939 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$) aufgetragen. Hierbei habe ich eine Auflösung von $n_r = 150$ ($n_a = 50$) und $n_\theta = 4$ gewählt. Der Neutronenstern mit $\rho_z = 1,925 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ ist noch stabil Modell (*S2*); die Zentraldichte führt eine Schwingung aus, deren Amplitude deutlich größer ist als die Amplitude des Neutronensterns geringerer Zentraldichte Modell (*S1*). Dagegen ist der Neutronenstern mit der höchsten Zentraldichte ($\rho_z = 1,939 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$) der drei Modelle instabil, er kollabiert Modell (*I*). Zu Beginn der zeitlichen Entwicklung erkennt man bei allen drei Modellen ein leichtes Absinken der Zentraldichte. Dies wird durch die Störung der Gleichgewichtsmodelle durch die Interpolation der TOV-Lösung auf das Gitter verursacht. Aus Abb. 4.5 entnimmt man die kritische Dichte zu $\rho_{\text{krit,N}} \approx 1,97 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$, was etwa 2,3% oberhalb der Zentraldichte $\rho_z = 1,926 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ des stabilen Modells *S2* liegt. Diese Abweichung ist identisch mit der, die von Linke [35] festgestellt wurde.

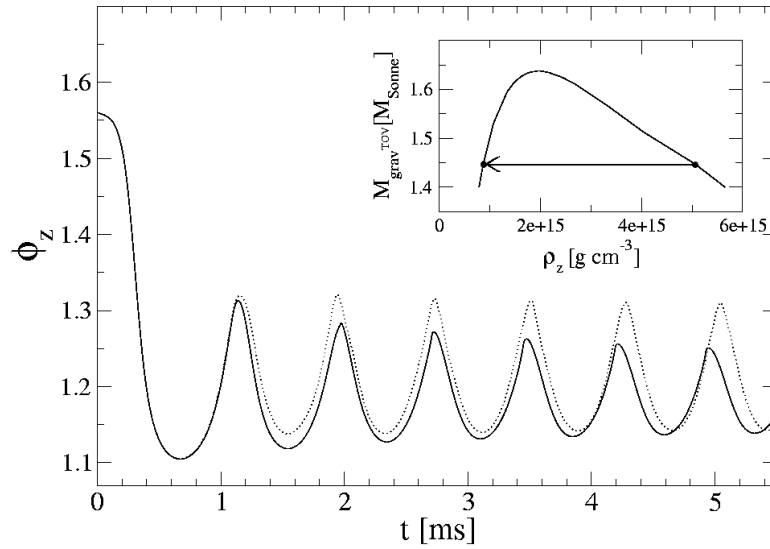


Abbildung 4.7: Entwicklung des zentralen konformen Faktors ϕ_z bei der Expansion eines instabilen Neutronensterns. Bei der Entwicklung mit der adiabatischen Zustandsgleichung wird die Schwingung kaum gedämpft (gepunktete Linie), während die nichtadiabatische Zustandsgleichung des idealen Gases eine signifikante Dämpfung der Schwingung hervorruft (durchgezogene Linie). Das Teilbild oben rechts zeigt die Migration vom instabilen Ast auf den stabilen Ast.

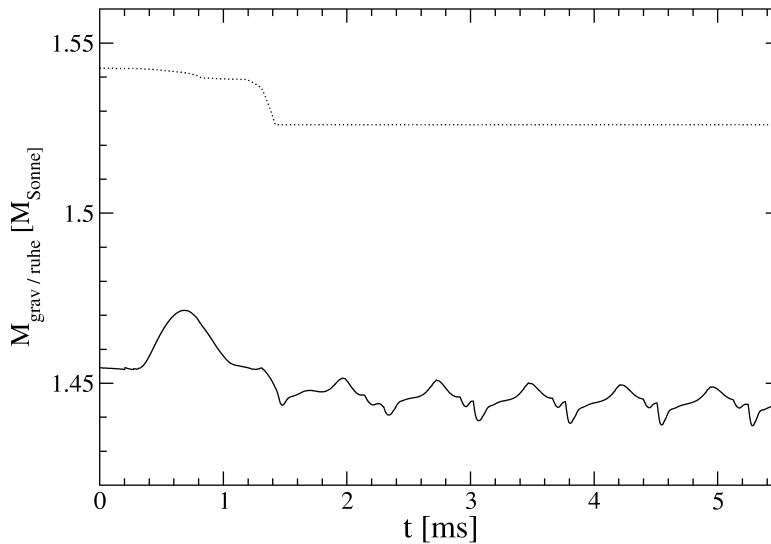


Abbildung 4.8: Gravitierende Masse (durchgezogene Kurve) und Ruhemasse (gepunktete Kurve) des expandierenden Neutronensterns als Funktion der Zeit. Durch die anfängliche starke Ausdehnung gibt es eine hohe Radialgeschwindigkeit nach aussen, was zu einem Ruhemassenstrom am äusseren Gitterrand führt. Daher sinkt die Ruhemasse um etwa 1% ab. Die Gravitationsmasse sinkt dadurch ebenfalls, wobei noch eine numerisch bedingte Schwingung synchron zu der Schwingung des konformen Faktors (Abb. 4.7) überlagert ist.

4.2.2 Migration instabiler Neutronensterne auf den stabilen Ast

Wie wir schon bei der Bestimmung der Stabilität gesehen haben, ist es möglich, dass es zu einer gravitierenden Masse zwei Gleichgewichtsmodelle gibt: Ein Modell befindet sich auf dem stabilen Ast, das andere Modell auf dem instabilen Ast (Abb. 4.5). Wenn man ein instabiles Gleichgewichtsmodell zur Expansion bringt, kann dieses Modell auf den stabilen Ast migrieren, da die gravitierende Masse erhalten ist. Allerdings ist das kein realistisches astrophysikalisches Szenario, denn Neutronensterne entstehen beim Kollaps des Zentralbereiches eines massereichen Sterns, zunächst unterhalb der kritischen Dichte, womit sie stabil sind. Durch Akkretion kann die Masse langsam zunehmen, bis der kritische Punkt erreicht wird, wo der Kollaps zu einem Schwarzen Loch einsetzt. Die Migration eines Neutronensterns ist aber ein guter Standardtest, um die Eigenschaften des Hydrodynamikprogramms bei großen Amplituden relativistischer Gravitationsfelder zu testen. Meine Ergebnisse lassen sich z.B. mit denen von Font et al. [20] vergleichen.

Als instabiles Gleichgewichtsmodell habe ich einen sphärisch symmetrischen Neutronenstern mit einer Zentraldichte von $\rho_z = 4,905 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ konstruiert, mit einer gravitierenden Masse von $M_{\text{grav}} = 1,447 M_{\odot}$. Um die Ausdehnung des Anfangsmodells zu berücksichtigen, habe ich eine ausreichend große Atmosphäre verwendet, mit $n_r = 250$ ($n_a = 200$) und $n_{\theta} = 4$, wobei der Gitterabstand in radialer Richtung äquidistant gewählt wurde. Das Anfangsmodell des Neutronensterns ist damit nur mit 50 radialen Gitterpunkten aufgelöst, wodurch die Störung des Gleichgewichtsmodells größer wird als bei der Bestimmung der Stabilität (Abschnitt 2.3). Bei dieser Auflösung setzte eine Expansion des instabilen Modells zu geringeren Dichten ein.

Abb. 4.7 zeigt die Entwicklung des konformen Faktors ϕ_z im Zentrum des Sterns, der ein Maß für die Zentraldichte darstellt. Innerhalb von etwa 0,6 ms hat ϕ_z sein absolutes Minimum erreicht, was einer maximalen Expansion des Sterns entspricht. Danach beginnt die Umkehrbewegung und es setzt die Phase der Schwingungen ein. Da das stabile Gleichgewichtsmodell gleicher Gravitationsmasse eine geringere gravitative Bindungsenergie besitzt, wird die Differenz der Bindungsenergie frei und kann in kinetische Energie umgewandelt werden, was die Schwingung verursacht.

Die weitere Entwicklung hängt davon ab, welche Zustandsgleichung verwendet wird. Für die Polytropen-Zustandsgleichung wird die erhaltene Variable τ zeitlich nicht mitentwickelt, weshalb die Dissipation von kinetischer Energie in innere Energie unberücksichtigt bleibt. Daher nenne ich sie hier adiabatische Zustandsgleichung. Bei der adiabatischen Zustandsgleichung bleibt die kinetische Energie im zeitlichen Mittel erhalten, d.h. die Schwingung ist bis auf eine geringfügige Abnahme der Amplitude durch die unvermeidliche numerische Viskosität ungedämpft. Bei der Zustandsgleichung des idealen Gases wird die kinetische Energie allmählich umgewandelt in innere Energie, wodurch die Schwingung signifikant gedämpft wird. Abb. 4.9 verdeutlicht die Vorgänge der Entstehung einer Stoßwelle, bei der diese Umwandlung geschieht. Kurz nach dem ersten Minimum von ϕ_z (Abb. 4.7) erreicht die nach aussen gerichtete radiale Geschwindigkeit v_r ihren maximalen Wert, danach setzt die Kontraktion ein. Der innere Kern kollabiert hierbei homolog, d.h. $v_r \propto r$ ($t = 0,83 \text{ ms}$). Durch das Abbremsen des inneren Kerns entsteht an der Grenzfläche zu den äusseren Schichten, die auf den verlangsamten inneren Kern einfallen, eine Stoßwelle (1,03 ms). Wenn der Kern wieder expandiert (Rückprall) entstehen

an der äusseren Kerngrenze Druckwellen, die die Stoßwelle mit kinetischer Energie versorgen. Die Stoßwelle propagiert nach aussen und dissipiert die kinetische Energie in innere Energie ($t = 1, 13$ ms).

Durch die Dämpfung der Schwingungen erhält man am Ende der Entwicklung einen heißen Neutronenstern mit etwas geringerer Zentraldichte ρ_z als ein kaltes Gleichgewichtsmodell gleicher Masse, da ein größerer Teil der Gesamtenergie in der inneren Energie enthalten ist. Die nichtadiabatischen Schwingungen großer Amplitude eines instabilen Sterns wenn er sich auf dem stabilen Ast niederlässt, unterstreicht die Wichtigkeit der Entwicklung aller erhaltenen Variablen (einschließlich der inneren Energie) und den Nutzen von HRSC-Verfahren, die Stoßwellen geeignet verfolgen können. Für diese Rechnung musste der CFL-Faktor (Abschnitt 3.2.2) auf den Wert von 0,3 reduziert werden, um die numerische Stabilität bei der Berechnung der Hydrodynamikgleichungen zu garantieren.

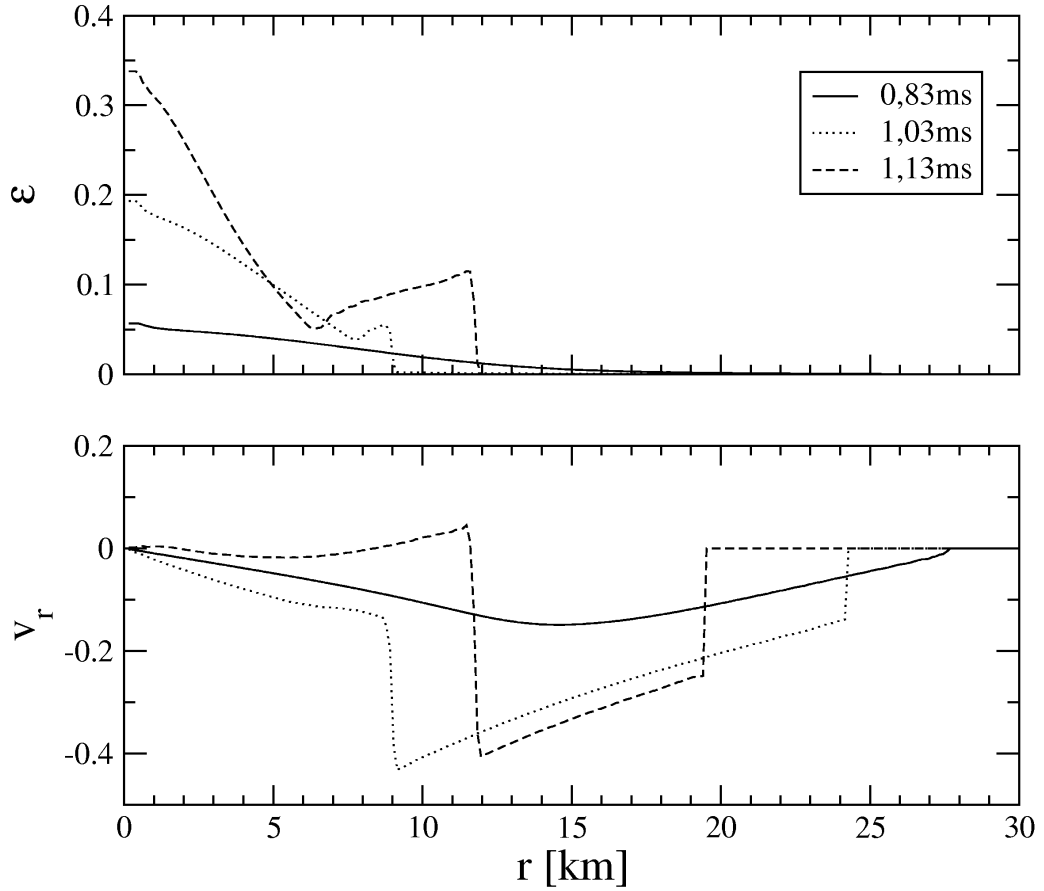


Abbildung 4.9: *Expansion eines instabilen Neutronensterns ($\rho_z = 4,905 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$), entwickelt mit der Zustandsgleichung des idealen Gases. Das obere Diagramm zeigt die innere Energie ϵ , das untere Diagramm die radiale Geschwindigkeit v_r jeweils zu drei verschiedenen Zeitpunkten. Im unteren Diagramm erkennt man zunächst die homologe Einfallphase mit $v_r \propto r$ bei $t = 0,83 \text{ ms}$. Durch den Rückprall des inneren Kerns bildet sich eine Stoßwelle, was durch die Unstetigkeitsstelle sowohl von ϵ als auch von v_r gekennzeichnet wird ($1,03 \text{ ms}$). Beim dritten Zeitpunkt $t = 1,13 \text{ ms}$ ist die Stoßwelle schon weiter nach aussen gelaufen und hat einen Teil der kinetischen Energie in innere Energie dissipiert, was am Anstieg von ϵ mit zunehmendem Radius zu erkennen ist. In der Atmosphäre wird die Geschwindigkeit auf Null gesetzt, was die zweite äußere Unstetigkeit in der Geschwindigkeit hervorruft. Man vergleiche mit Fig.10 in [20], wo die Stoßwelle schon etwas früher entsteht und bei $t = 1,13 \text{ ms}$ schon zu einem größeren Radius propagiert ist. Ein Grund dafür könnte sein, dass das dort verwendete kartesische Gitter zu einer größeren Störung des Anfangsmodells geführt hat, im Vergleich zu dem von mir verwendeten polaren, sphärischen Gitter. Ausserdem beachte man, dass die Konstruktion der Atmosphäre unterschiedlich ist (es gilt nicht $v_i = 0$).*

Kapitel 5

Ergebnisse und Diskussion

5.1 Sphärischer Kollaps

5.1.1 Entwicklung während des Kollapses

Für den Kollaps eines sphärischen extrem massereichen Sterns wurde ein Modell von Felix Linke [36] mit $M = 10^6 M_\odot$ konstruiert, die Parameter findet man in Tabelle 5.1. Als Gitterauflösung wurden 250 Gitterpunkte in radialer Richtung ($n_r = 250$) ohne Atmosphäre ($n_a = 0$) und vier Gitterpunkte in θ -Richtung ($n_\theta = 4$) gewählt. Der erste radiale Gitterpunkt befindet sich bei einem Radius von $r_1 = 0,2 \times 10^{10}$ cm, was $1/40$ des Schwarzschildradius $r_s = M/2 = 7,2 \times 10^{10}$ cm ist. Man beachte, dass die erste (innerste) Gitterzelle, wegen des exponentiell anwachsenden radialen Abstandes, die geringsten Abmessungen hat. Daher wird der Zeitschritt durch die Größe dieser Zelle, also durch r_1 , bestimmt. Je kleiner man r_1 wählt, desto größer wird die gesamte Rechendauer wegen des kleineren Zeitschrittes.

Unter der Annahme von vollständig ionisierten Wasserstoff ist $\mu = 0,5$ und aus (2.41) erhält man die kritische Dichte zu $\rho_{\text{krit}} = 1,99 \times 10^{-3} \text{ g cm}^{-3}$. Die Zentraldichte ist also etwas größer als die kritische Dichte, weswegen sich der Stern in einem instabilen Gleichgewicht befindet. Um den Kollaps zu initiieren, habe ich die Temperatur des Gleichgewichtsmodells um 1% abgesenkt ($T \rightarrow 0,99 T$). Der Kollaps dauert $5,76 \times 10^5 \text{ s}$ (16,7 Tage). Verglichen mit der Entwicklungszeit bis zum Einsetzen der postnewtonschen Instabilität $t_{\text{krit}} = 2,8 \times 10^{10} \text{ s}$ (2.66) ist das um den Faktor 5×10^4 schneller. Dabei vollzieht sich der größte Teil des Kollapses im nichtrelativistischen Bereich: 90% der Zeit ist die Abweichung der Zeitdehnungsfunktion im Zentrum kleiner als 1%. Erst gegen Ende des Kollapses beschleunigt sich die Entwicklung dramatisch. Wenn sich das Schwarze Loch zu bilden beginnt, verharret die Entwicklung der hydrodynamischen Größen, da die Eigenzeit im Verhältnis zur Beobachterzeit immer langsamer vergeht; dagegen beschleunigt sich die Entwicklung der Metrikgrößen.

Abb. 5.1 zeigt die radialen Profile der Dichte ρ , der Temperatur T , der Zeitdehnungsfunktion α , des konformen Faktors ϕ , der radialen Geschwindigkeit v_r und des radialen Verschiebungsvektors β_r zu verschiedenen Zeitpunkten während des Kollapses. Die Dichte steigt während des

ρ_z	$2,80 \times 10^{-3} \text{ [g cm}^{-3}\text{]}$
K	$3,86 \times 10^{18} \text{ [cm}^3 \text{ g}^{-1/3} \text{ s}^{-2}\text{]}$
M_{grav}	$1,00 \times 10^6 M_{\odot}$
R/M	$1,42 \times 10^3$

Tabelle 5.1: *Parameter des sphärischen Anfangsmodells: Die Zentraldichte ρ_z , die Polytropenkonstante K , die gravitierende Masse M_{grav} und das Verhältnis R/M von Radius R zur Ruhemasse M , mit $M = 10^6 M_{\odot}$.*

Kollapses um neun Größenordnungen an, während die Zeitdehnungsfunktion im Zentrum von $\alpha_z = 1$ auf $\alpha_z = 0,05$ zurückgeht. Die radiale Geschwindigkeit erreicht gegen Kollapsende einen maximalen Wert von $-0,42c$. Das Geschwindigkeitsprofil ist proportional zu r bis zu einem Radius von $r \approx 2 \times 10^{10} \text{ cm}$. Die Dichteprofile sind in etwa selbstähnlich, d.h. der Kollaps verläuft homolog, wobei die Abweichungen gegen Kollapsende deutlich zunehmen.

Nach Goldreich & Weber [23] verläuft der Kollaps einer sphärischen 4/3-Polytrope in Newtonscher Gravitation exakt homolog. Abweichungen davon ergeben sich durch die allgemeine Relativitätstheorie und dadurch, dass der Adiabatenindex während des Kollapses im Zentrum des Sterns von 4/3 abweicht. Das nichthomologe Verhalten fällt zusammen mit dem Überschreiten einer Temperatur von 10^9 K im Sterninneren. Dadurch können Elektron-Positron-Paare entstehen, was den Adiabatenexponenten unter den Wert 4/3 senkt, da ein Teil der thermischen Energie aufgebracht werden muss, um die Ruhemasse der Paare zu erzeugen.

Um die Abweichungen vom homologen Kollaps besser darzustellen, habe ich in Abb. 5.2 die Dichte auf die Zentraldichte ρ_z normiert und den Radius durch die Lane-Emden-Koordinate ξ (2.16) ersetzt. Der Kollaps verläuft bis zum Zeitpunkt mit $R/M = 85$ nahezu homolog, für kleinere Radien werden die Abweichungen besonders im Zentrum wegen des gesunkenen Adiabatenexponenten deutlich. Der Radius verringert sich während des homologen Kollapses von $R/M = 1420$ (Anfangsmodell) auf $R/M = 85$, was einem Verhältnis von 1/17 entspricht. Wegen $R/M \propto \rho_z^{-1/3}$ (2.20) steigt die Zentraldichte während des homologen Kollapses um einen Faktor ~ 5000 an. Shapiro & Teukolsky [47] sowie Saijo et al. [45] erhielten beim Kollaps exakter 4/3-Polytrope ähnliche Werte.

Die Bildung der Elektron-Positron-Paare oberhalb einer Temperatur von 10^9 K ist auch deutlich an der Entwicklung während des Kollapses im Temperatur-Dichte-Diagramm zu erkennen (Abb. 5.3).

5.1.2 Entstehung des Schwarzen Lochs

Bei der Entstehung des Schwarzen Lochs im Zentrum des kollabierenden extrem massereichen Sterns bilden sich ein *Ereignishorizont* und ein *scheinbarer Horizont (apparent horizon)*. Der Ereignishorizont ist definiert als die innere Grenze des Gebietes, aus dem Lichtstrahlen den asymptotisch flachen Raum eines Beobachters im Unendlichen erreichen können. Weil die Lichtlaufzeit beliebig lang sein kann, ist es erforderlich, die Metrik für die gesamte Zukunft ab dem Aussenden der Lichtstrahlen zu kennen, um den Weg des Lichtstrahles verfolgen zu können. Es

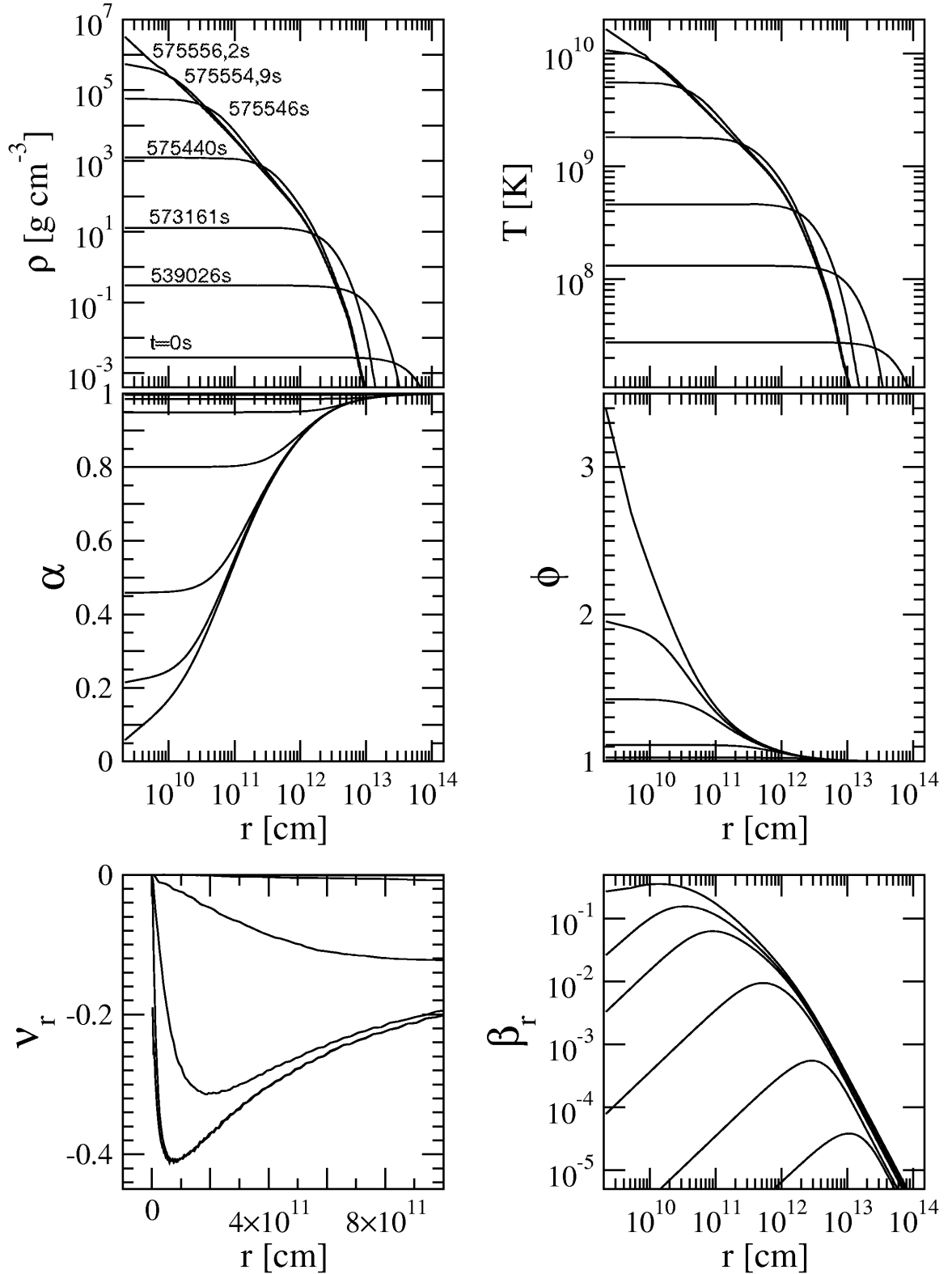


Abbildung 5.1: Radiale Profile von Dichte ρ , Temperatur T , Zeitdehnungsfunktion α , konformen Faktor ϕ , radialer Geschwindigkeit $v_r = \sqrt{v_1 v^1}$ und Verschiebungsvektor $\beta_r = \sqrt{\beta_1 \beta^1}$ für einen Eulerschen Beobachter zu verschiedenen Zeitpunkten. Zum letzten Zeitpunkt befindet sich der scheinbare Horizont bei einem Radius von $r \approx 3 \times 10^{10}$ cm.

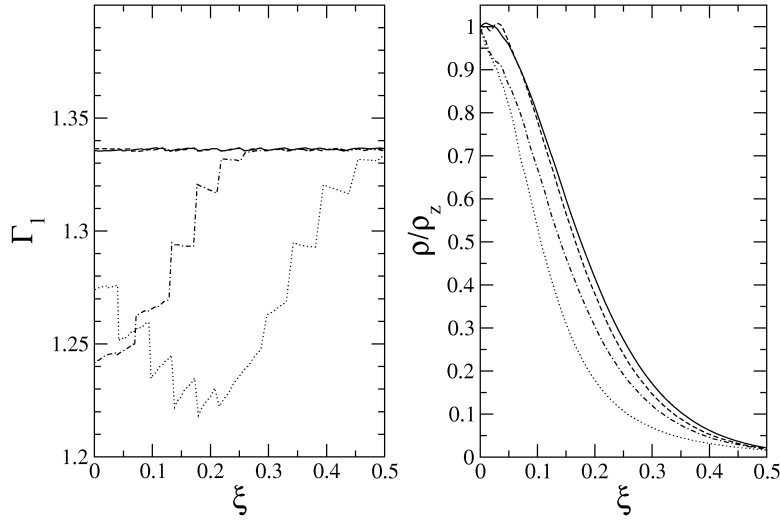


Abbildung 5.2: Radiale Profile des adiabatischen Exponenten (links) und der Dichte (rechts) während des sphärischen Kollapses. Durchgezogene, gestrichelte, strich-gepunktete und gepunktete Linien gehören zu Zeitpunkten mit einem Sternradius von $R/M = (442, 85, 40, 18)$. Wenn ein Profil mit der durchgezogenen Linie übereinstimmt, ist die Sternstruktur homolog. Der Kollaps verläuft bis zum Zeitpunkt, wo $R/M = 85$ gilt, nahezu homolog. Die Abweichungen im weiteren Verlauf des Kollapses werden durch allgemein relativistische Effekte und durch das Absinken des adiabatischen Exponenten unter einen Wert von $4/3$ verursacht.

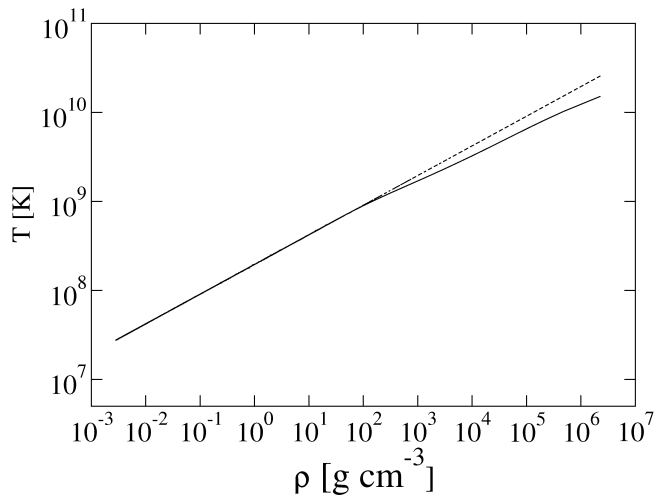


Abbildung 5.3: Die Entwicklung des extrem massereichen Sterns (durchgezogene Linie) im Temperatur-Dichte-Diagramm (Zentraltemperatur/Zentraldichte). Oberhalb einer Temperatur von 10^9 K werden Elektron-Positron-Paare erzeugt, die Steigung der Kurve nimmt ab. Zum Vergleich ist die analytische Kurve gezeigt (gestrichelt), deren Steigung durch die konstante spezifische Entropie bestimmt wird ($s \propto T^3/\rho = \text{konst.}$).

ist allerdings bei einem nahezu sphärischen Kollaps ausreichend, den Lichtstrahl nur bis zum Rand des Sterns bzw. des Gitters zu verfolgen, da dort das Gravitationsfeld annähernd statisch ist (Abschnitt 3.45). Da für lichtartige Geodäten $ds^2 = 0$ gilt, erhält man für eine radiale Lichttrajektorie aus dem allgemeinen Linienelement (3.8):

$$g_{00}dt^2 + 2\beta_1 dt dr + g_{11}dr^2 = 0. \quad (5.1)$$

Da die Funktionen g_{00} , g_{11} und β_1 auf allen Hyperflächen Σ_t bekannt sind, kann man daraus dr bestimmen in Abhängigkeit vom Zeitschritt dt . Durch sukzessive Integration von Σ_t zu Σ_{t+dt} durch alle Hyperflächen kann die Trajektorie des Lichtstrahls bis zum Rand des Gitters verfolgt werden.

Der Ereignishorizont entsteht im Zentrum des Sterns, da von dort aus der Lichtweg zum Beobachter am längsten ist. Er wächst langsam nach aussen, bis er den Schwarzschildradius $r_s = M/2$ erreicht, wenn die Masse des gesamten Sterns durch das wachsende Schwarze Loch akkretiert worden ist, und ein statisches, sphärisches Schwarzes Loch entstanden ist. Der Ereignishorizont trennt den vom Beobachter sichtbaren Teil des Sterns vom nicht sichtbaren Teil. Der Teil des Sterns innerhalb des Ereignishorizontes ist vom Beobachter kausal getrennt.

Der scheinbare Horizont entspricht der *äußersten eingefangenen Oberfläche* (*outermost trapped surface*) [6]. Die Gravitation ist auf einer eingefangenen Oberfläche so stark, dass zwei ausgesandte divergierende Lichtstrahlen sich einander annähern; die Basisfläche eines emittierten Lichtkegels wird mit der Zeit kleiner [39]. Der scheinbare Horizont liegt immer innerhalb des Ereignishorizontes. Für ein statisches Schwarzes Loch sind beide identisch. Der scheinbare Horizont kann lokal bestimmt werden, d.h. ohne dass man Lichtstrahlen verfolgen muss und ohne dass man die Metrik bis zur lichtartigen Unendlichkeit kennen muss. Das Auftreten des scheinbaren Horizontes wird durch das Erfüllen folgender Bedingung festgestellt [10]:

$$g_{00} = 0 \quad (\text{Scheinbarer Horizont}). \quad (5.2)$$

Wenn man diese Bedingung in das Linienelement für eine radiale Lichttrajektorie (5.1) einsetzt, folgt wegen $\beta_1 > 0^a$, dass $dr < 0$ gelten muss. Damit wird jeder radiale Lichtstrahl, ausgesendet auf dem scheinbaren Horizont, durch die Gravitation so stark verbogen, dass er zum Zentrum des Sterns zurückfällt. Wegen $g_{00} = -\alpha^2 + \beta_i\beta^i$, gilt für den flachen Minkowskiraum ($\alpha = -1$, $\beta_i = 0$), dass $g_{00} = -1$ ist. Mit fortschreitendem Kollaps wird der Betrag von α kleiner und der von $\beta_r = \sqrt{\beta_1\beta^1}$ (im sphärischen Fall gilt $\beta_2 = \beta_3 = 0$) größer, wie man der Abb. 5.1 entnehmen kann. Daher wird g_{00} fortlaufend größer. Abb. 5.4 zeigt Profile von g_{00} zu unterschiedlichen Zeitpunkten, wobei g_{00} mit der Zeit monoton wächst. Zum dritten Zeitpunkt wird das Kriterium (5.2) zum ersten Mal erfüllt. Das Auftreten der äusseren Nullstelle von g_{00} bei $r \approx 1,03 \times 10^{10}\text{cm}$ zeigt die Entstehung des scheinbaren Horizontes an. Jeder Lichtstrahl, der innerhalb einer Sphäre mit diesem Radius emittiert wird, kann wegen $dr < 0$ nicht in das Gebiet ausserhalb der Sphäre propagieren.

Der scheinbare Horizont entsteht also im Gegensatz zum Ereignishorizont bei einem endlichen Radius, denn für die Radialgeschwindigkeit erhält man als innere Randbedingung $v^i(r=0) = 0$, woraus mit (3.16) und (3.38) $\beta^i(r=0) = 0$ folgt. Da aber immer $\alpha > 0$ gilt, folgt, dass die Bedingung (5.2) nicht für $r = 0$ erfüllt sein kann. Mit fortschreitender Zeit vergrößert sich

^aDie Bedingung $\beta_1 > 0$ folgt aus (3.38). Denn wegen $v^1 < 0$ (Kollaps) gilt $S^i > 0$, was aus (3.16) folgt.

der Radius des scheinbaren Horizontes (Abb. 5.4). In Abb. 5.5 ist der Radius des scheinbaren Horizontes in Abhängigkeit von der Zeit zusammen mit den Weltlinien von Massenschalen mit einer eingeschlossenen Ruhemasse von $M_i = 10^5 M_\odot \cdot i$ ($i = 1, \dots, 9$) aufgetragen. Der Radius des scheinbaren Horizontes wächst schnell; zum Ende der Simulation werden zwischen 10% und 20% der Ruhemasse des Sterns von der zugehörigen Sphäre eingeschlossen. Im oberen Diagramm von Abb. 5.4 ist die Funktion $m_{\text{grav}}(r)/(2r)$ aufgetragen, wobei $m_{\text{grav}}(r)$ die lokale gravitierende Masse innerhalb des Radius r bedeutet. In isotropen Koordinaten ist der Schwarzschildradius der lokalen Gravitationsmasse $r_s = m_{\text{grav}}/2$. Daher entspricht für

$$\frac{m_{\text{grav}}(r)}{2r} = 1 \quad (5.3)$$

der Radius r dem Schwarzschildradius von $m_{\text{grav}}(r)$, was ebenfalls die Entstehung eines Horizontes anzeigt. Dieses Kriterium gilt allerdings nur näherungsweise, da der Schwarzschildhorizont nur für den statischen, sphärischen Fall definiert ist. Ausserdem ist (5.3) nur ein lokales Kriterium, denn die zeitliche Entwicklung der Metrik wird nicht berücksichtigt. Die Definition einer lokalen gravitierenden Masse ist ebenfalls nur für einen statischen, sphärischen Stern exakt möglich (3.81). In einer Näherung habe ich sie in Erweiterung der gravitierenden Gesamtmasse (4.4) derart berechnet, dass am Gitterradius R_G beide identisch sind:

$$m_{\text{grav}}(r) = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^r r'^2 dr' \phi^5 \left(\rho h W^2 - P + \frac{K_{ij} K^{ij}}{16\pi} \right). \quad (5.4)$$

Im letzten dargestellten Zeitpunkt in Abb. 5.4 ist das Kriterium (5.3) bei einem Radius von $r_h = 2 \times 10^{10}$ cm zum ersten Mal erfüllt. Das entspricht einer lokalen Gravitationsmasse von $m_{\text{grav}} = 0,27M$. Dieses Ergebnis stimmt gut mit dem von Linke gefundenen Wert von $0,25M$ überein [36]. Der Radius stimmt nahezu mit der äusseren Nullstelle von g_{00} überein, wo sich der scheinbare Horizont befindet. Die beiden Kriterien (5.2) und (5.3) ergeben also in guter Übereinstimmung den scheinbaren Horizont.

Hierbei muss man allerdings die Einschränkung machen, dass sich in diesem Stadium des Kollapses die Ungenauigkeit bei der Metrikberechnung bemerkbar macht, wie ich schon in Abschnitt 4.1 diskutiert habe. Der Fehler nimmt dabei mit kleiner werdendem Radius zu, für den ersten Gitterpunkt bei $r_1 = 2 \times 10^9$ cm ist er maximal. Das erkennt man in Abb. 5.4 an dem zweiten, inneren Maximum von $m_{\text{grav}}(r)/(2r)$. Da die eingeschlossene Gravitationsmasse bei $r = 0$ beginnend aufsummiert wird (5.4), wirkt sich der Fehler auch auf größere Radien aus und damit auch auf die gravitierende Gesamtmasse. Wenn bei r_1 die eingeschlossene Gravitationsmasse um 50% falsch berechnet wird, dann reduziert sich der Fehler (wenn ϕ für $r > r_1$ korrekt ist) für $r_h \approx 10 r_1$ auf etwa 5%, da näherungsweise $m_{\text{grav}}(r)/r \approx 1$ gilt. Wie ich schon in der Erläuterung zu Abb. 4.3 erklärt habe, ist die zentrale Auflösung entscheidend für die Erhaltung der gravitierenden Gesamtmasse. Daher wäre die Rechnung mit einer höheren zentralen Auflösung eine Möglichkeit, sich von der Richtigkeit der vorgestellten Ergebnisse zu überzeugen. Da mit der gewählten Auflösung die Simulation etwa 30 Stunden gedauert hat, habe ich auf eine Erhöhung der zentralen Auflösung verzichtet.

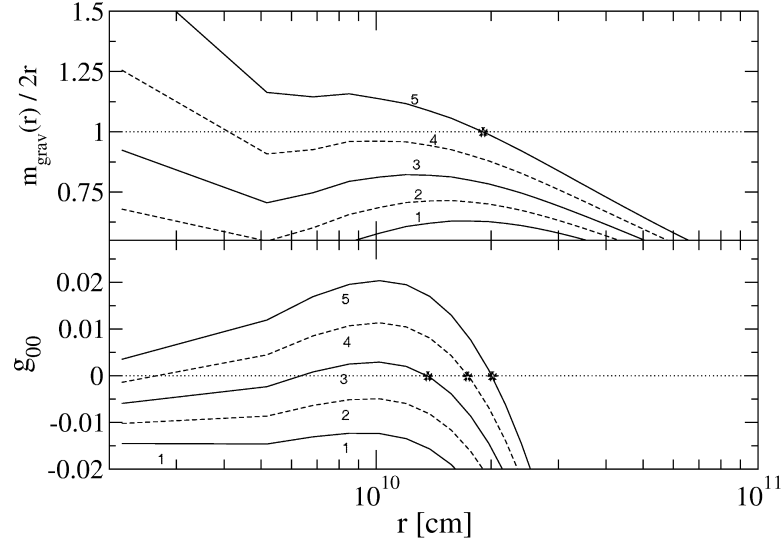


Abbildung 5.4: Radiale Profile des Quotienten $m_{\text{grav}}(r)/(2r)$ und der Komponente g_{00} des metrischen Tensors zu fünf verschiedenen Zeitpunkten (1 bis 5). Die Entstehung des scheinbaren Horizontes wird durch eine Nullstelle von g_{00} angezeigt [10], die durch ein '*' markiert ist. Zum letzten Zeitpunkt gilt $m_{\text{grav}}(r_h)/(2r_h) = 1$ für einen Horizontradius von $r_h = 2 \times 10^{10}$ cm. Daraus folgt eine eingeschlossene Gravitationsmasse von $m_{\text{grav}}(r_h) = 0,27M$.

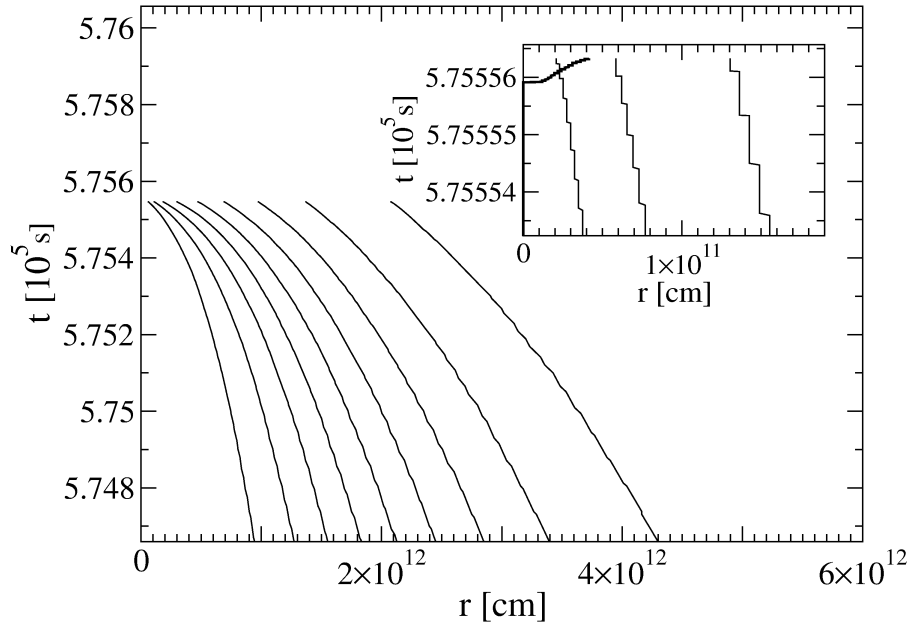


Abbildung 5.5: Weltlinien von Massenschalen $m(r)$ mit einer eingeschlossenen Ruhemasse von $M_{\text{ruhe}} = 10^5 M_\odot \cdot i$, ($i = 1, \dots, 9$). Das Innenbild zeigt in der Vergrößerung die Weltlinien der Massenschalen von $1 \times 10^5 M_\odot$, $2 \times 10^5 M_\odot$ und $3 \times 10^5 M_\odot$. Das Schwarze Loch beginnt sich zu formen, wenn der scheinbare Horizont (dicke Linie, berechnet nach Kriterium (5.2)) entsteht. Bis zum Ende der Simulation sind zwischen 10% und 20% der Ruhemasse des Sterns durch das Schwarze Loch akkretiert worden.

5.1.3 Neutrinoleuchtkraft

Um die Neutrinoleuchtkraft zu berechnen, ist es erforderlich die Trajektorien der Neutrinos zu kennen. Wenn man von einer Neutrinoruhemasse $m_\nu = 0$ ausgeht (die Neutrinoruhemasse $\sim eV$ ist vernachlässigbar gegen die Neutrinoenergie $\sim \text{MeV}$), kann das analog zu der Berechnung von Lichttrajektorien (5.1) geschehen. Optimal zur Auswertung der Leuchtkraft sind Koordinaten, bei denen die Raumzeit in lichtartige Hyperflächen aufgeblättert wird, wie sie z.B. von Linke [36] benutzt wurden. Bei Verwendung dieser Koordinaten kann die Leuchtkraft wie im statischen Fall entlang einer radialen Lichttrajektorie aufintegriert werden. Bei einer Aufblätterung der Raumzeit in raumartige Hyperflächen muss dagegen berücksichtigt werden, dass sich die Metrik ändert, während die Neutrinos den Stern durchlaufen. Nur im statischen Fall liefert eine instantane Aufintegration innerhalb einer Hyperfläche Σ_t die exakte Neutrinoleuchtkraft. Im dynamischen Fall, muss die endliche Laufzeit der Neutrinos berücksichtigt werden, indem man die Bewegung der Neutrinos entlang ihrer Trajektorien auswertet. Ich habe jedoch darauf aus Zeitgründen verzichten müssen, und stattdessen eine Integration innerhalb einer raumartigen Hyperfläche Σ_t ($t=\text{konst.}$) benutzt, was nur im statischen Fall exakt ist. Damit ergibt sich die nichtrotverschobene Neutrinoleuchtkraft \hat{L}_ν zu:

$$\hat{L}_\nu = 2\pi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{R_G} dr r^2 \phi^6 Q_\nu, \quad (5.5)$$

wobei Q_ν die volumenspezifische Energiedichte der Neutrinoemission ist. Um die Rotverschiebung zu erhalten, muss das Verhältnis von Eigenzeit τ zur Beobachterzeit t bestimmt werden. Die Eigenzeit einer Uhr wird auf einer zeitartigen Trajektorie durch $d\tau^2 = -ds^2$ definiert, was mit dem Linienelement (3.8) folgendes ergibt:

$$ds^2 = -d\tau^2 = g_{00}dt^2 + 2\beta_1 dr dt + 2\beta_2 d\theta dt + 2\beta_3 d\varphi dt + g_{11}dr^2. \quad (5.6)$$

Da sich das emittierende Fluidelement bewegt, muss diese Bewegung als Dopplerverschiebung mit in die Rotverschiebung einbezogen werden. Mit der Definition der Vierergeschwindigkeit $u^i = dx^i/d\tau$, folgt für die einzelnen Koordinaten:

$$u^1 = \frac{dr}{d\tau}, \quad u^2 = r \frac{d\theta}{d\tau}, \quad u^3 = r \sin\theta \frac{d\varphi}{d\tau}. \quad (5.7)$$

Setzt man die Definition der Vierergeschwindigkeit in (5.6) ein, ergibt sich eine quadratische Gleichung für $d\tau$. Die Lösung lautet:

$$d\tau = \frac{g_{00}dt}{\sqrt{1 + g_{11}(u^1)^2} \left\{ -(\beta_1 u^1 + \beta_2 \frac{u^2}{r} + \beta_3 \frac{u^3}{r \sin\theta}) - \sqrt{(\beta_1 u^1 + \beta_2 \frac{u^2}{r} + \beta_3 \frac{u^3}{r \sin\theta})^2 - g_{00}} \right\}}, \quad (5.8)$$

wobei die Lösung mit $d\tau/dt > 0$ gewählt wurde (es gilt $g_{00} < 0$, denn ansonsten läge das emittierende Gebiet innerhalb des scheinbaren Horizontes, von wo aus kein Neutrino den Beobachter erreichen kann). Der verlangsamte Verlauf der Eigenzeit gegenüber der Beobachterzeit ($d\tau > dt$) erzeugt zwei Effekte:

- Die Frequenz der Neutrinos wird kleiner und damit auch die Energie, denn zwischen Emissionsfrequenz ν_E und beobachteter Frequenz ν_A besteht der Zusammenhang $\nu_E d\tau = \nu_A dt$ und die Energie der Neutrinos ist wegen $m_\nu \approx 0$ zur Frequenz proportional.

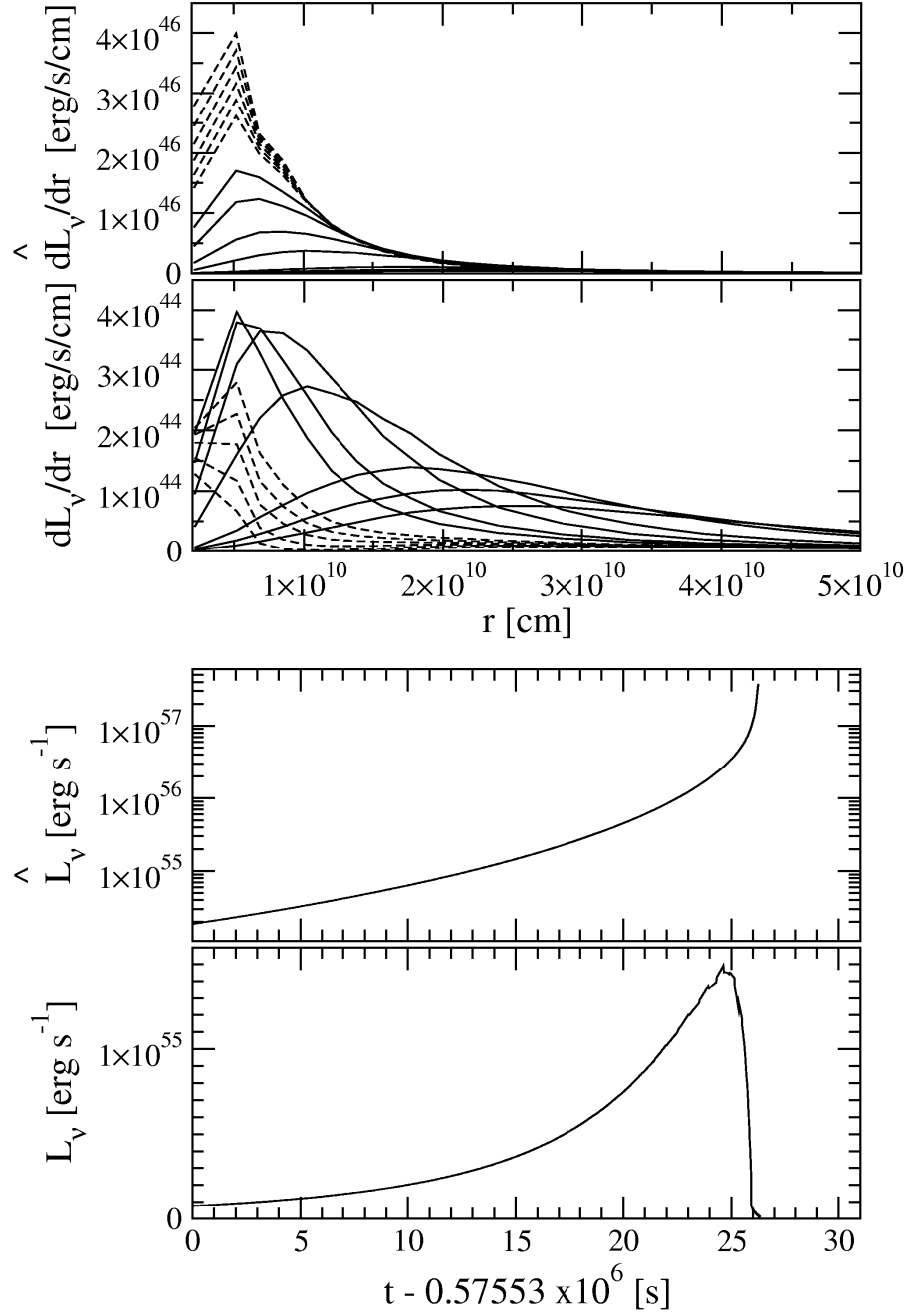


Abbildung 5.6: Im Diagramm ganz oben ist das radiale Profil der nichtrotverschobenen (bzw. im Diagramm darunter der rotverschobenen) differentiellen Neutrinoleuchtkraft $\frac{d\hat{L}}{dr}$ (bzw. $\frac{dL}{dr}$) zu verschiedenen Zeitpunkten aufgetragen. $\frac{d\hat{L}}{dr}$ steigt wegen der zunehmenden Temperatur an. $\frac{dL}{dr}$ steigt zunächst an (durchgezogene Linien), durch die zunehmende Rotverschiebung wird $\frac{dL}{dr}$ reduziert, obwohl $\frac{d\hat{L}}{dr}$ noch ansteigt (gestrichelte Linien). In den unteren beiden Diagrammen sind die zugehörigen Neutrinoleuchtkräfte in Abhängigkeit von der Beobachterzeit aufgetragen. Das Maximum der rotverschobenen Neutrinoleuchtkraft tritt vor der Entstehung des scheinbaren Horizontes ein (vgl. Abb. 5.5).

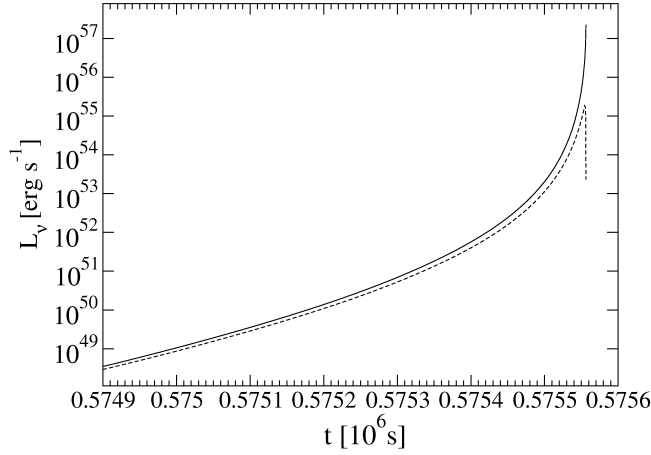


Abbildung 5.7: Die Neutrino-Leuchtkraft (durchgezogene Linie) und die rotverschobene Neutrino-Leuchtkraft (gestrichelte Linie) in Abhängigkeit von der Beobachterzeit. Durch die Entstehung des scheinbaren Horizontes wird die rotverschobene Leuchtkraft sehr abrupt reduziert.

- Die Zahl der emittierten Neutrinos pro Zeiteinheit des Beobachters ist geringer als pro Zeiteinheit des Emissionsgebietes (Eigenzeit).

Damit ergibt sich die rotverschobene, vom Beobachter gemessene Leuchtkraft L_ν zu:

$$L_\nu = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{R_G} dr r^2 \phi^6 \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 Q_\nu. \quad (5.9)$$

Abb. 5.6 zeigt in den oberen beiden Diagrammen die differentielle rotverschobene Neutrino-Leuchtkraft $dL/dr = 4\pi r^2 \phi^4 Q_\nu$ (bzw. die nichtrotverschobene Neutrino-Leuchtkraft entsprechend $d\hat{L}/dr = 4\pi r^2 \phi^4 (d\tau/dt)^2 Q_\nu$) einer Kugelschale in Abhängigkeit vom Radius. Die nichtrotverschobene Leuchtkraft steigt an, da die Temperatur während des Kollapses immer weiter zunimmt. Gleichzeitig wird der Radius des Emissionsgebietes immer kleiner, da sich das Gebiet mit der maximalen Temperatur verkleinert (vgl. Abb. 5.1). Das Maximum der differentiellen Neutrino-Leuchtkraft wird nicht im Zentrum angenommen, weil das Volumenelement proportional zu r^2 ist. Daraus folgt, dass $\phi^4 Q_\nu$ nicht schneller abfällt als r^{-2} . Das Maximum von dL/dr wird bei einem Radius von $r \approx 5 \times 10^9$ cm angenommen, wobei sich die geringe Auflösung im Zentrum bemerkbar macht ($r_1 \approx 2 \times 10^9$ cm). Die differentielle rotverschobene Neutrino-Leuchtkraft dL/dr ist etwa zwei Größenordnungen kleiner als differentielle nichtrotverschobene Leuchtkraft $d\hat{L}/dr$. Unmittelbar vor der Entstehung des scheinbaren Horizontes nimmt die Rotverschiebung wegen $g_{00} \rightarrow 0$ schnell zu. Daher sinkt die rotverschobene differentielle Neutrino-Leuchtkraft dL/dr , obwohl die nichtrotverschobene differentielle Leuchtkraft $d\hat{L}/dr$ ansteigt. In Abb. 5.7 ist die zeitliche Entwicklung von \hat{L}_ν und L_ν in den letzten 650 Sekunden vor dem Ende der Simulation dargestellt. Die Rotverschiebung nimmt bis zur Entstehung des scheinbaren Horizontes langsam zu; bei der Entstehung des scheinbaren Horizontes wird das Emissionsgebiet für den Beobachter im Unendlichen unsichtbar, die rotverschobene Neutrino-Leuchtkraft wird abrupt reduziert.

5.2 Kollaps einer rotierenden Konfiguration

Ziel ist es, den Kollaps eines rotierenden extrem massereichen Sterns zu simulieren. Dazu habe ich ein Modell mit maximaler, gleichförmiger Rotation (vgl. Abschnitt 3.5.2) konstruiert, dessen Parameter in Tabelle 5.2 zusammengefasst sind. Die Gitterauflösung ist $n_r = 250$ ($n_a = 0$) und $n_\theta = 20$, d.h. mit insgesamt 5000 Gitterpunkten während ich den sphärischen Kollaps nur mit 1000 Gitterpunkten berechnet habe. Ich habe die zentrale Auflösung um einen Faktor ~ 3 auf $r_1 = 7,1 \times 10^9$ cm reduziert, um den höheren Rechenaufwand auszugleichen. Die Metrikberechnung wurde mit der Newton-Methode durchgeführt, da die abgewandelte Green-Methode noch nicht auf dem SX-5 Vektor-Computer lauffähig ist, auf dem das rotierende Modell wegen des hohen Rechenaufwands gerechnet worden ist. Um den Kollaps zu initiieren, habe ich wie im sphärischen Fall die Temperatur um 1% abgesenkt. Durch die höhere Anfangsdichte im Vergleich zum sphärischen Modell ist der Kollaps beschleunigt, er dauert $8,87 \times 10^4$ s, was 1,03 Tagen entspricht.

Die Rechnung wurde beendet, als die Metrik-Lösung durch die Newton-Methode eine starke Verletzung der gravitierenden Gesamtmasse M_{grav} erzeugte (Abschnitt 4.1). Die Erhaltung von M_{grav} ist während der Simulation gut erfüllt (Abweichung kleiner als 1%), weshalb die korrekte Metriklösung gesichert ist. Die Ruhemasse M_{ruhe} ist sehr gut erhalten, der Verlust ist geringer als 0,1%. Daraus folgt, dass trotz maximaler Rotation des Anfangsmodells kein Massenverlust über den äusseren Gitterrand einsetzt, weshalb auch der Verlust an Drehimpuls geringer als 0,1% ist. Abb. 5.8 zeigt die radialen Profile von ρ , T , α , ϕ , v_r und β_r in der Äquatorebene zu verschiedenen Zeitpunkten. Sie sind sehr ähnlich zu denen des sphärischen Kollapses, wobei die Entwicklung nicht so weit fortschreitet wie im Falle des sphärischen Kollapses. Da die Newton-Methode nur bis zu einer zentralen Zeitdehnungsfunktion von $\alpha_z \approx 0,5$ funktionierte, ist die Entstehung eines scheinbaren Horizontes noch nicht erreicht (Abb. 5.10).

ρ_z	0,105 [g cm ⁻³]
K	$3,82 \times 10^{18}$ [cm ³ g ^{-1/3} s ⁻²]
M_{grav}	$0,991 \times 10^6 M_\odot$
R_p/R_a	0,676
$T/ W $	$8,81 \times 10^{-3}$
J/M^2	0,952
R_p/M	413

Tabelle 5.2: Parameter für das Anfangsmodell des rotierenden extrem massereichen Sterns: Die Zentraldichte ρ_z , die Polytropenkonstante K , die gravitierende Masse M_{grav} , das Verhältnis von polaren zu äquatorialen Radius R_p/R_a , das Verhältnis von kinetischer Energie zu Bindungsenergie $T/|W|$, das Verhältnis J/M^2 (mit dem Drehimpuls J und der Ruhemasse $M = 10^6 M_\odot$) sowie das Verhältnis R_p/M .

Abb. 5.9 zeigt radiale Profile der Rotationsgeschwindigkeit. Die Zeitpunkte sind identisch zu denen in Abb. 5.8. Das Anfangsmodell rotiert gleichförmig $v_3 \propto r$ über den gesamten Radius, mit einer maximalen Rotationsgeschwindigkeit von $v_3 = 0,03c$. Während des Kollapses wird die globale gleichförmige Rotation nicht aufrecht erhalten, nur im zentralen Bereich bleibt sie näherungsweise erhalten. Zum Ende der Simulation erstreckt sich dieser Bereich bis zu einem Radius von $r \approx 10^{11}$ cm, was einer eingeschlossenen Ruhemasse von $0,2M$ entspricht. Durch die Kontraktion des Sterns vergrößert sich infolge der Drehimpulserhaltung die Rotationsgeschwindigkeit bis auf $0,18c$. Dadurch wächst auch das Verhältnis der kinetischen Rotationsenergie zur Bindungsenergie auf einen Wert von $T/|W| \approx 0,8$ an.

Nach [43] verstärken sich nichtaxialsymmetrische Störungen für $T/|W| > 0,27$ auf dynamischen Zeitskalen. Die am schnellsten anwachsende Mode, ist eine Balkenmode ($l = 2$). Da bis zum Ende der Rechnung $T/|W| < 0,1$ gilt, ist eine Ausbildung der Balkenmode ausgeschlossen. Auch wenn in der späteren Entwicklung, die hier nicht simuliert wurde, ein Wert von $T/|W| > 0,27$ erreicht werden kann, sollte die verbleibende Zeit bis zur Entstehung des Schwarzen Lochs nicht ausreichend für eine Balkenbildung sein. Für ein sphärisches Modell dauert die Entwicklung von $\alpha_z = 0,5$ bis zur Bildung des scheinbaren Horizontes etwa $t_e = 10$ s (vgl. Abb. 5.1). Die Annahme, dass diese Zeitskala auch für das rotierende Modell gilt, scheint gerechtfertigt, da für $\alpha_z \approx 0,5$ die Radialgeschwindigkeit $v_r \sim 0,3c$ des sphärischen Kollaps in etwa der des nichtsphärischen Kollapses entspricht. Aus der Rotationsgeschwindigkeit $v_\varphi \sim c$, die bei einem Radius von $r \sim 10^{11}$ cm angenommen wird (Abb. 5.9), erhält man als Abschätzung für die dynamische Zeitskala $t_{\text{dyn}} = 2\pi r/v_3 \sim 10$ s. Der physikalische Radius (\neq Koordinatenradius) des zentralen Bereiches ändert sich in den letzten 10 Sekunden vor der Entstehung des scheinbaren Horizontes nur geringfügig, wie ich in Abschnitt 5.3 noch erläutern werde. Daher bleibt auch die dynamische Zeitskala nahezu unverändert. Da der Zeitraum bis zur Entstehung des Schwarzen Lochs in etwa der dynamischen Zeitskala entspricht, ist die Entwicklungszeit zu kurz, um eine Balkenbildung zu ermöglichen.

Abb. 5.11 zeigt die Weltlinien der Massenschalen mit einer Ruhemasse $0,1M \dots 0,9M$. Am Ende der Rechnung befinden sich 70% der Ruhemasse innerhalb von $r \approx 10^{12}$ cm, was etwa dem 13-fachen des Schwarzschildradius entspricht. Diese Massenkonzentration ist vergleichbar mit der des sphärischen Falles (vgl. Abb. 5.5). Nur für die äußerste Massenschale ist der Radius im Vergleich zum sphärischen Kollaps durch die Wirkung der Fliehkräfte deutlich größer: $r(0,9M) \approx 3,5 \times 10^{12}$ cm im Vergleich zu $r(0,9M) \approx 2 \times 10^{12}$ cm. Diese Ergebnisse sind in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Saijo et al. [45].

Eine wichtige Frage ist, ob die durch die Rotation verursachte Fliehkraft ausreicht, um die Bildung einer Materiescheibe (Akkretionsscheibe) zu ermöglichen, die über einige dynamische Zeitskalen t_{dyn} stabil ist. Dann könnte sich zunächst ein Schwarzes Loch mit geringerer Masse bilden, das über den Zeitraum einiger t_{dyn} die Materie der Akkretionsscheibe akkretiert. Die alternative Möglichkeit ist, dass die Massenkonzentration trotz Rotation im Zentrum so hoch ist, dass ein Großteil der Materie den scheinbaren Horizont innerhalb einer Zeitskala von wenigen t_{dyn} überschreitet.

Diese Frage lässt sich aus meiner Simulation des rotierenden Modells nicht abschließend beantworten, da die Bildung des Schwarzen Lochs noch nicht stattgefunden hat. Trotzdem kann man vermuten, dass sich keine Akkretionsscheibe mit einem Großteil der Sternmasse bei Radien von mehr als dem 50-fachen Schwarzschildradius bildet, da sich 90% der Ruhemasse am Ende der Simulation schon innerhalb einer Sphäre von 50 Schwarzschildradien befinden. Damit ist aber

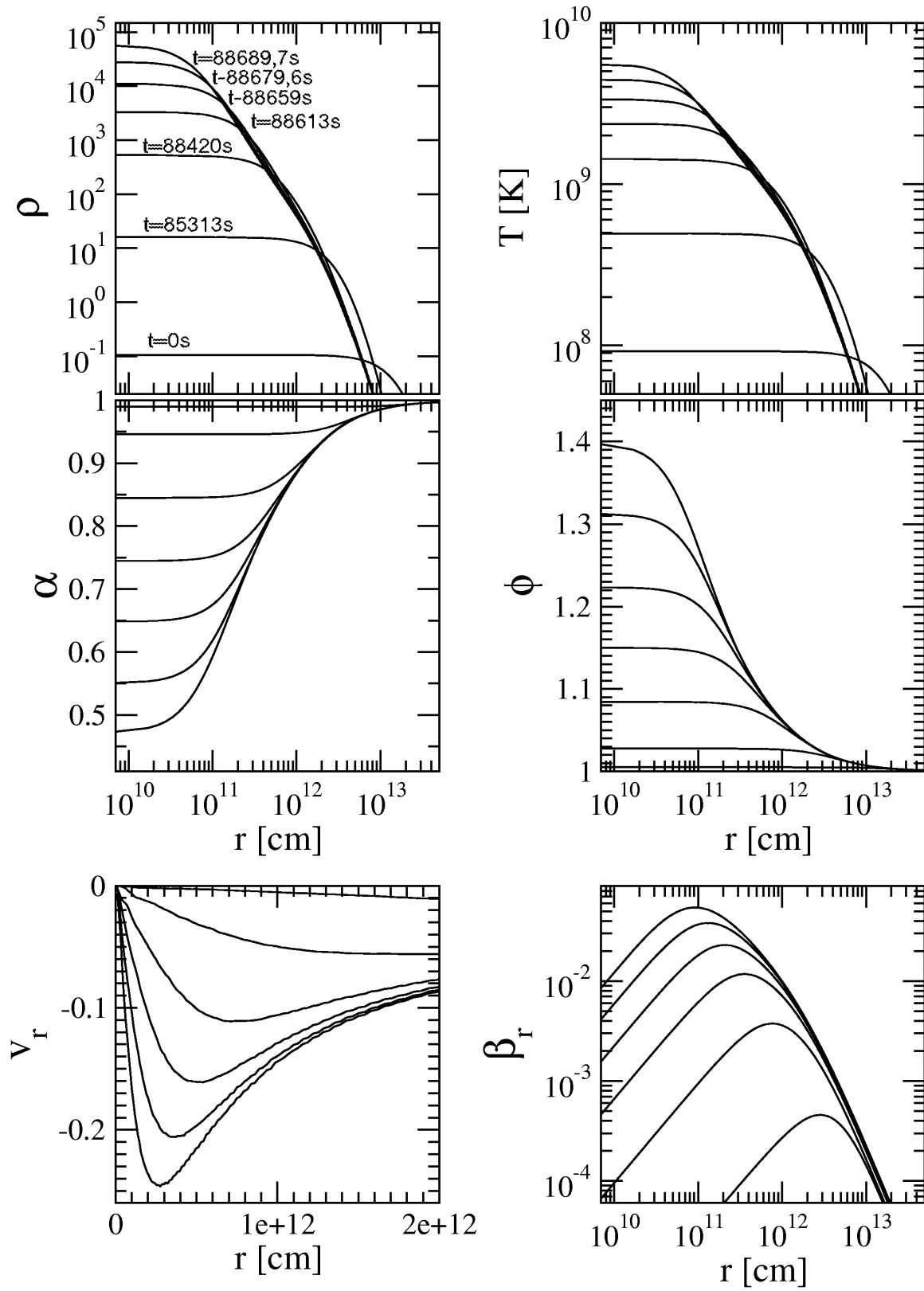


Abbildung 5.8: Radiale Profile von ρ , T , α , ϕ , v_r und β_r zu verschiedenen Zeitpunkten in der Äquatorebene des rotierenden extrem massereichen Sterns.

nicht ausgeschlossen, dass sich eine Akkretionscheibe bei einem wesentlich kleinerem Radius von wenigen Schwarzschildradien bildet. Dabei darf der Radius aber nicht kleiner sein, als drei Schwarzschildradien, wo sich die innerste, stabile Kreisbahn befindet [48].

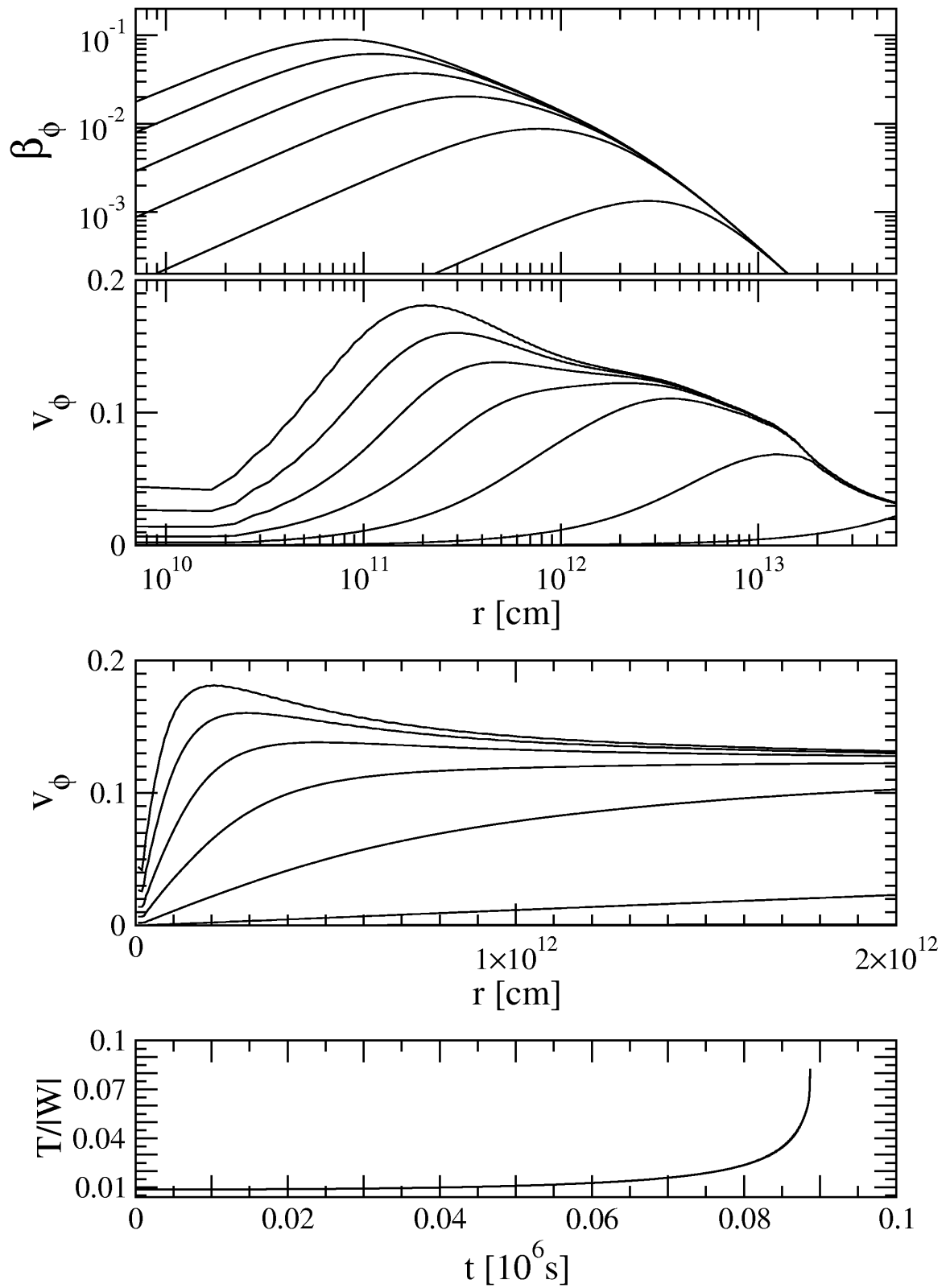


Abbildung 5.9: Radiale Profile der Rotationsgeschwindigkeit v_ϕ und des Verschiebungsvektors β_ϕ in der Äquatorebene zu den Zeitpunkten wie in Abb. 5.8 (obere drei Diagramme). In untersten Diagramm ist die zeitliche Entwicklung des Quotienten $T/|W|$ dargestellt.

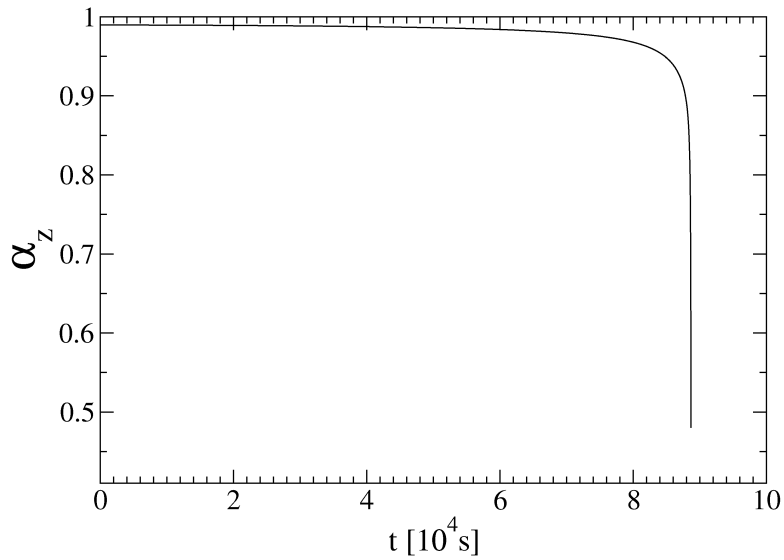


Abbildung 5.10: Die zeitliche Entwicklung der zentralen Zeitdehnungsfunktion eines rotierenden extrem massereichen Sterns mit der Newton-Methode. Der schnelle Abfall am Ende der Rechnung zeigt die Bildung des Schwarzen Lochs an. Mit der Newton Methode war eine weitere Entwicklung als bis $\alpha_z \approx 0,5$ nicht möglich.

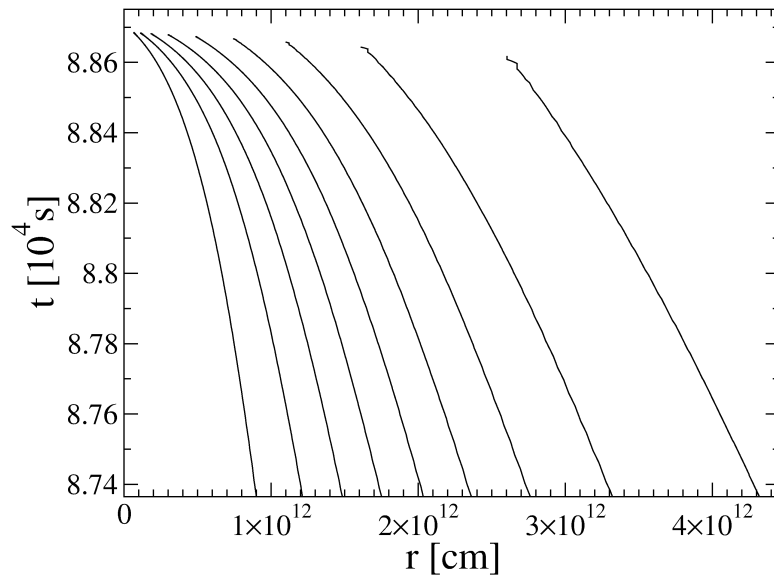


Abbildung 5.11: Weltlinien von Massenschalen $m(r)$ mit einer eingeschlossenen Ruhemasse von $M_{\text{ruhe}} = 10^5 M_{\odot} \cdot i$, ($i = 1, \dots, 9$) des rotierenden extrem massereichen Sterns. Bei einem Vergleich mit Abb. 5.5 erkennt man, dass die äußerste Massenschale sich bei einem deutlich größeren Radius befindet. Rotation verzögert den Kollaps der äußersten Bereiche des Sterns, während die Massenkonzentration im Sternzentrum im Vergleich mit dem sphärischen Kollaps unverändert bleibt.

5.3 Diskussion

5.3.1 Numerische Probleme bei Entstehung des Schwarzen Lochs

Wie schon in Abschnitt 4.1 festgestellt, nimmt die Verletzung der Erhaltung der gravitierenden Masse am Ende des Kollapses mit abnehmender Zeitdehnungsfunktion zu. Dabei gibt es eine starke Abhängigkeit von der zentralen Auflösung: Je kleiner der Radius des ersten Gitterpunktes, desto weiter lässt sich der Kollaps ohne Verletzung der gravitierenden Masse verfolgen. Die gravitierende Masse ist ein sehr gutes Kriterium zur Überprüfung der numerischen Lösung der Metrikgleichungen (3.36-3.38), da ihre Erhaltung im Gegensatz zu der von Ruhemasse und Drehimpuls nicht allein durch die korrekte Lösung der Erhaltungsgleichungen (3.20-3.22) garantiert wird. Bei dem vorgestellten sphärischen Kollaps gilt für die relative Abweichung der gravitierenden Masse $\Delta M_{\text{grav}} = 10\%$ für $\alpha_z = 0,3$ bzw. $\phi_z = 1,6$ und $\Delta M_{\text{grav}} = 15\%$ für $\alpha_z = 0,2$ bzw. $\phi_z = 2,0$ und $\Delta M_{\text{grav}} = 30\%$ für $\alpha_z = 0,1$ bzw. $\phi_z = 2,4$. Die Verletzung der gravitierenden Masse nimmt also in der Endphase des Kollapses bei der Entstehung des Schwarzen Lochs drastisch zu. Ähnliche Größenwerte gelten bei der Erhaltung der spezifischen Entropie.

Als Gründe für dieses Verhalten lässt sich zum einen die sehr weiche Zustandsgleichung ausmachen, die zu einer sehr starken Konzentration der Materie im Zentrum führt. Dazu addiert sich der Effekt der stark sinkenden physikalischen Auflösung im Zentrum. Der physikalische Abstand der Gitterpunkte Δ skaliert wegen der Transformation (3.85) mit dem konformen Faktor $\Delta \propto \phi^2$. Zu Beginn der Rechnung des sphärischen Kollapses ist der Schwarzschildradius durch 25 Gitterpunkte in radialer Richtung aufgelöst, der konforme Faktor hat im Zentrum den Wert $\phi_1 \approx 1$. Bei der Entstehung des Schwarzen Lochs ist der konforme Faktor auf $\phi_2 \approx 3$ angewachsen. Der Abstand der Gitterpunkte ist angewachsen von Δ_1 auf $\Delta_2 = (\phi_2 - \phi_1)^2 \Delta_1 \approx 10\Delta_1$, d.h. die Auflösung ist um einen Faktor 10 reduziert. Der Schwarzschildradius ist daher nur noch durch zwei bis drei Gitterpunkte in radialer Richtung aufgelöst, was nicht ausreichend ist. Die schnell sinkende Auflösung ist also auf den schnell wachsenden konformen Faktor zurückzuführen, was wiederum eine Folge der gewählten Eichung der maximal möglichen Aufbläuterung (maximal slicing) der Raumzeit ist. Für die zeitliche Entwicklung des konformen Faktors erhält man aus dieser Eichung:

$$\partial_t \phi = \frac{\phi}{6} \nabla_k \beta^k. \quad (5.10)$$

Mit $\nabla_k \beta^k > 0$ ($\beta^i > 0$) in der Umgebung des Zentrums ($r = 0$) steigt der physikalische Abstand zweier Gitterpunkte während des Kollapses im Zentrum an. Daher kann mit dieser Eichbedingung die Entstehung eines Schwarzen Lochs nicht hoch aufgelöst werden, ohne die Auflösung im Zentrum während des Kollapses zu erhöhen. Um diesen Effekt der Koordinatendehnung auszugleichen, kann man während des Kollapses den Stern auf ein neues Gitter transformieren, während man die Atmosphäre des Sterns nicht weiter betrachtet. Eine Transformation bei einem Entwicklungszeitpunkt mit $\alpha_z = 0,8$ würde eine 100-fach verbesserte Auflösung ergeben, da der Sternradius bis zu diesem Zeitpunkt um einen Faktor 100 abgenommen hat. Erfolgreiche Rechnungen sind mit dieser Methode inzwischen durchgeführt worden, jedoch ist auch damit nach der Bildung des scheinbaren Horizontes nicht die Akkretion aller Materie durch das Schwarze Loch beobachtbar [50].

Eine weitere Verbesserung könnte die Verwendung eines adaptiven Gitters bringen (*adaptive mesh refinement*) [5]. Dabei müsste allerdings die Auflösung ebenso schnell ansteigen, wie das Quadrat des konformen Faktors. Da dies auch den Zeitschritt entsprechend verringert, wird auch dieses Verfahren seine Grenzen haben. Die eleganteste Methode um die Entstehung des Schwarzen Lochs mit hoher Auflösung verfolgen zu können, wäre eine Eichung zu finden, mit der das starke Anwachsen des konformen Faktors vermieden werden kann. Dazu muss man aber die konform flache Näherung aufgeben, da sonst keine Eichfreiheit mehr besteht.

5.3.2 Vergleich mit lichtartiger Foliation der Raumzeit

Linke benutzte für den Kollaps von sphärischen extrem massereichen Sternen eine lichtartige Foliation der Raumzeit und präsentierte Lichtkurven der Neutrinoemission [36]. Der Vergleich mit der raumartigen Foliation der Raumzeit, die ich benutzt habe, zeigt einige Unterschiede auf, sowohl bei der Verfolgbarkeit der Entstehung des Schwarzen Lochs als auch bei der Auswertung der Neutrinoluminosität. Diese Unterschiede möchte ich kurz diskutieren.

Eigenschaften der Koordinaten: In der von Linke benutzten Bondi-Sachs-Metrik stimmt der Koordinatenradius mit dem physikalischen Radius überein. Daher gibt es den oben erwähnten Effekt der Koordinatendehnung bei einem zunehmend relativistischen Gravitationsfeld nicht. Da von einem entfernten Beobachter aus gesehen wegen der Zeitdilatation die Entwicklung der Hydrodynamik vor der Bildung des Schwarzen Lochs zunehmend langsamer verläuft, ändern sich Dichte und (physikalischer) Sternradius kaum noch. Die Dichteprofile in Abb. 5.1 zeigen für alle Zeitpunkte (ausser für den letzten) einen zentralen Bereich (ungefähr) konstanter Dichte. Zum Zeitpunkt $t = 5,75546 \times 10^5$ s hat dieser Bereich einen Radius von $r = 3 \times 10^{10}$ cm, was einem physikalischen Radius von 6×10^{10} cm entspricht (berechnet mit $\phi = 1,4$). Im nächsten Zeitpunkt $t = 5,755549 \times 10^5$ s (etwa 9 s später) ist der Koordinatenradius nur noch $r \approx 1,5 \times 10^{10}$ cm, was einem physikalischen Radius von etwa 5×10^{10} cm entspricht. Der physikalische Radius der zentralen Kondensation des Sterns ändert sich also kaum, der Stern verharret vom Beobachter aus gesehen vor der Bildung des Schwarzen Lochs (*eingefrorener Stern*). Beim letzten Zeitpunkt $t = 5,755562 \times 10^5$ s in Abb. 5.1, wenn der scheinbare Horizont entsteht, ist der Verlust an Auflösung im Zentrum so groß, dass es keinen Bereich konstanter Dichte mehr gibt.

Aus den Dichteprofilen von Linke (Abb. 5 in [36]) ergibt sich für den Zeitpunkt der Bildung des scheinbaren Horizontes einen Radius von 3×10^{10} cm für die Ausdehnung des Bereiches konstanter Dichte. Etwa 10 bis 20 Sekunden (in der Zeitmessung eines weit entfernten Beobachters) vor diesem Zeitpunkt ergibt sich ein Wert von 8×10^{10} cm. Das Zusammenschrumpfen des Sternradius mit dem einhergehenden Auflösungsverlust tritt also in den Koordinaten der Bondi-Sachs-Metrik nicht auf. Die Profile sind bei Linke auch im Zentrum ausreichend gut aufgelöst.

Da man bei einem raumfesten Gitter die Auflösung im Zentrum nur erhöhen kann, wenn man eine Erhöhung der Rechendauer zulässt, wird man versuchen eine möglichst geringe Auflösung zu wählen. Es ist also von großem Vorteil, dass bei der lichtartigen Foliation die Auflösung gegenüber der raumartigen Foliation geringer sein kann. Oder anders formuliert: Bei gleicher

Rechendauer ermöglicht die lichtartige Foliation eine viel bessere Auflösung des entstehenden Schwarzen Lochs als die raumartige Foliation. Daher ist bei einem raumfesten Gitter die lichtartige Foliation der raumartigen Foliation (mit maximal slicing und konform flacher Näherung) bei der Verfolgung der Entstehung des Schwarzen Lochs überlegen.

Neutrinoemission: Die Neutrinoemission kommt vollständig von einem Bereich tief im Inneren des Sterns, wo die Temperaturen am höchsten sind. Für den Temperatur- und Dichtebereich in der Endphase des Kollapses wird die Neutrinoemission durch die Neutrinos aus der Paarvernichtung dominiert, mit einer starken Abhängigkeit von der Temperatur $Q_\nu \propto T^9$ [27]. Durch die steigende Temperatur steigt daher auch die Leuchtkraft der Neutrinos, auch wenn der Radius der emittierenden Neutrinosphäre kleiner wird und sich auch deren Emissionsvolumen ($\propto r^2 dr$) verkleinert. Wegen der starken Temperaturabhängigkeit werden die meisten Neutrinos erst in den letzten Sekunden des Kollapses emittiert ($\Delta t \approx 20$ s), wenn auch die Temperaturen maximal sind. Entscheidend für die mögliche Beobachtung der Neutrinos ist die rotverschobene Neutrinoleuchtkraft. Weil die Neutrinos nahe dem Sternzentrum entstehen, wo die Metrik stark von der Minkowski-Metrik abweicht, erfahren die Neutrinos eine Gravitationsrotverschiebung.

Durch die Bildung des scheinbaren Horizontes wird die rotverschobene Neutrinoluminosität innerhalb von $\delta t \approx 1$ s um den Faktor 100 reduziert, da das Gebiet innerhalb des Horizontes, wo die Neutrinoemission Q_ν am höchsten ist, für den weit entfernten Beobachter unsichtbar wird. An ihrem Maximum beträgt die Neutrinoleuchtkraft $\hat{L}_\nu = 2,6 \times 10^{56} \text{ erg s}^{-1}$ bzw. $L_\nu = 1,5 \times 10^{55} \text{ erg s}^{-1}$ (rotverschoben). Von dem Kollaps eines extrem massereichen Sterns wird erwartet, dass er in großen Entfernungen stattfindet, da sich extrem massereiche Sterne in der Frühphase des Universums gebildet haben. Wegen der Expansion des Universums muss noch eine zusätzliche Rotverschiebung berücksichtigt werden (Kosmologische Rotverschiebung).

Zum Vergleich seien hier die Werte von Linke für den Zeitpunkt des Maximums der rotverschobenen Neutrinolichtkurve genannt: $2 \times 10^{55} \text{ erg s}^{-1}$ bzw. $1 \times 10^{54} \text{ erg s}^{-1}$. Diese Leuchtkräfte liegen also jeweils eine Größenordnung unterhalb meiner Ergebnisse. Die Rotverschiebung beim Eintreten des Maximums, also der relative Unterschied zwischen rotverschobener und nichtrotverschobener Leuchtkraft folgt aus meinen Ergebnissen zu $\hat{L}_\nu/L_\nu = 17$, bzw. aus denen von Linke zu $\hat{L}_\nu/L_\nu = 20$, die somit gut übereinstimmen. Der Grund für die Abweichung meiner Neutrinoleuchtkräfte zu den Ergebnissen von Linke ist die Näherung der instantanen Aufintegration der Neutrinoemission. Dabei wird vernachlässigt, dass die Neutrinos eine endliche Zeit brauchen, um den Stern zu verlassen. Während dieser Zeit setzt sich der Kollaps weiter fort, so dass die Rotverschiebung steigt, aber auch die Temperatur und die Emission der Neutrinos. Durch die instantane Aufintegration wird also die Rotverschiebung unterschätzt und die Neutrinoemission überschätzt. Da sich die Metrikgrößen aber in der Endphase des Kollapses sehr schnell verändern, während die hydrodynamischen Größen sich immer langsamer verändern, überwiegt die Unterschätzung der Rotverschiebung, womit insgesamt die rotverschobene Leuchtkraft überschätzt wird.

Die nichtrotverschobene Neutrinoleuchtkraft hat zum Zeitpunkt $t = 5,75546 \times 10^5 \text{ s}$ (vgl. Abb. 5.1) den Wert $\hat{L}_\nu = 2 \times 10^{55} \text{ ergs}^{-1}$, also den Wert, den Linke für den Zeitpunkt des Maximums erhalten hat. Die rotverschobene Leuchtkraft hat dann den Wert $L_\nu = 4,5 \times 10^{54} \text{ erg s}^{-1}$, was die von Linke erhaltene Leuchtkraft 4,5-mal übertrifft. Zu diesem Zeitpunkt ist die Gitterauflösung ausreichend groß, so dass eine Überschätzung der Temperatur wegen zu geringer

Auflösung ausgeschlossen werden kann. Damit bleibt nur die Unterschätzung der Rotverschiebung als Erklärung für die Überschätzung der rotverschobenen Leuchtkraft. Man beachte dabei, dass sich der scheinbare Horizontes etwa 10 Sekunden später bildet. Der Stern hat zu diesem Zeitpunkt eine physikalische Ausdehnung von der Größenordnung 10^{10} cm, die in etwa konstant bleibt (s.o.). In Eigenzeit brauchen Neutrinos ungefähr 1 Sekunde, um den Stern zu verlassen. Bei einer Zeitdilatation der Größenordnung 10 brauchen sie also in Beobachterzeit 10 Sekunden für diesen Weg. Damit würde die Emission mit der Bildung des scheinbaren Horizontes zusammenfallen, was die Rotverschiebung stark erhöht. Das Maximum tritt nach dieser Abschätzung also tatsächlich zu diesem Zeitpunkt ein.

Das Maximum der rotverschobenen Neutrino-leuchtkraft wird nach Abb. 5.6 zum Zeitpunkt $t = 5,755549 \times 10^5$ s erreicht, wobei die Profile für diesen Zeitpunkt in Abb. 5.1 (vorletzter Zeitpunkt) zu finden sind. Die Temperatur am ersten Gitterpunkt hat bei diesem Zeitpunkt den Wert $1,06 \times 10^{10}$ K. Bei der Vergleichsrechnung von Linke wird dagegen die Temperatur zu keinem Zeitpunkt größer als 10^{10} K. Wegen der starken Temperaturabhängigkeit der Neutrinoemission ($Q_\nu \propto T^9$) genügt schon eine Temperaturreduktion ($T \rightarrow 0,77T$), um eine Reduktion der Leuchtkräfte um den Faktor 10 zu erhalten. Für die maximale rotverschobene Neutrino-leuchtkraft ist daher die Temperatur entscheidend, die zum Zeitpunkt des Maximums im Emissionsgebiet vorliegt. Da die Auflösung der zentralen Konzentration, wie weiter oben diskutiert, sehr gering ist, kann daraus eine Überschätzung der Temperatur resultieren.

Kapitel 6

Zusammenfassung

Beobachtungen beweisen die Existenz kompakter dunkler Objekte mit Massen von $10^6 M_\odot$ bis $10^{9.5} M_\odot$ in den Zentren vieler Galaxien. Obwohl andere Möglichkeiten nicht ganz ausgeschlossen werden können, deuten die Untersuchungen darauf hin, dass es sich um rotierende extrem massereiche Schwarze Löcher handelt. Durch diese Beobachtungen wurde die Diskussion um extrem massereiche Sterne neu entfacht, da sie ein mögliches Vorgängermodell darstellen. Nach der Entstehung werden sie durch postnewtonsche Effekte instabil und der nachfolgende Kollaps kann nicht durch nukleare Energiefreisetzung aufgehalten werden. Die durch den Kollaps freiwerdende Energie wird zum überwiegenden Teil in Form von Neutrinos abgestrahlt. Beim Kollaps eines rotierenden extrem massereichen Sterns können wegen der Abweichungen von der sphärischen Symmetrie Gravitationswellen entstehen. Um Aussagen über die Beobachtbarkeit von Neutrinos und Gravitationswellen zu bekommen, sind allgemeinrelativistische Simulationen mit adäquater Mikrophysik erforderlich. Solche Simulationen sind im Rahmen meiner Diplomarbeit durchgeführt worden.

Das mir zur Verfügung gestellte zweidimensionale Hydrodynamikprogramm von Dimmelmeier [12] ist hervorragend für diese Aufgabe geeignet. Die Einsteinschen Feldgleichungen werden in konform flacher Näherung (*CFC-Methode*) gelöst, was bei sphärischer Symmetrie sogar exakt ist und für rotierende Sterne vernachlässigbare Fehler erzeugt. Durch die Verwendung von sphärischen Polarkoordinaten kann die Rotationssymmetrie des Problems ausgenutzt werden. Die exponentielle Verteilung der Gitterpunkte in radialer Richtung erlaubt eine hohe Auflösung im Zentrum um einen Stern während einer Kontraktion über mehrere Größenordnung mit genügend hoher Auflösung verfolgen zu können. Meine Arbeit war die erste Anwendung dieses Programms, bei der die Entstehung eines Schwarzen Lochs simuliert werden sollte. Daher war es ebenfalls eine wichtige Aufgabe der Diplomarbeit, einige Testrechnungen mit Objekten starker Gravitation durchzuführen. Dabei hat sich herausgestellt, dass die implementierten Metrik-Löser für sehr kompakte Neutronensterne (Zentraldichte $> 5 \times$ Kerndichte) die Metrik selbst im hydrostatischen Fall nur mit Einschränkungen korrekt berechnen können. Die Testrechnung der Migration eines Neutronensterns vom instabilen Ast auf den stabilen Ast, konnte zunächst nicht reproduziert werden. Der Kollaps eines extrem massereichen Sterns konnte mit den vorhandenen Metrik-Lösern nur bis zu einer Zeitdilatation im Sternzentrum von 2 (entsprechend einer Zeitdehnungsfunktion von $\alpha = 0,5$) verfolgt werden, womit die Entstehung des

Schwarzen Lochs noch nicht erreicht war. Erst durch die Abwandlung eines der vorhandenen Metrik-Löser konnten schließlich doch noch die Testrechnungen erfolgreich durchgeführt werden und mit Ergebnissen anderer Autoren verglichen werden.

Durch die Anwendung der verbesserten Metrik-Methode wurde der Kollaps eines sphärischen extrem massereichen Sterns mit einer Masse von $10^6 M_\odot$ bis zur Entstehung des Schwarzen Lochs einschließlich des Beginns der Akkretion simuliert. Es wurde ein scheinbarer Horizont gefunden, der bei seiner Bildung die innersten 27% der gravitierenden Sternmasse einschließt. In Übereinstimmung mit anderen Arbeiten vollzog sich der Kollaps homolog, d.h. $v_r \propto r$. Abweichungen von der Homologie ergeben sich erst, wenn der Sternradius kleiner als etwa 160 Schwarzschildradien wird. Sie lassen sich zum einen auf Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie, zum anderen auf die Bildung von Elektron-Positron-Paaren zurückführen. Betrachtet man die thermische Neutrinoemission, so wird die meiste Energie unmittelbar vor der Entstehung des scheinbaren Horizontes freigesetzt, wenn die Temperaturen im stellaren Kern am höchsten sind. Die Neutrinoleuchtkraft für einen weit entfernten Beobachter nimmt ein Maximum an, denn bei der Entstehung des scheinbaren Horizontes wächst die Rotverschiebung schneller an als die nichtrotverschobene Neutrinoleuchtkraft. Für einen Stern mit einer Masse von $10^6 M_\odot$ ist die e^+e^- -Paarvernichtung in ein $\nu\bar{\nu}$ -Paar der wichtigste Prozess zur Neutrinoerzeugung. Ein Vergleich mit der Simulation von Linke [36] zeigte bei den Neutrinoluminositäten keine Übereinstimmung. Linke verwendete eine lichtartige Foliation der Raumzeit, d.h. er rechnete auf Lichtkegeln, wodurch die Berechnung der Neutrinoluminosität stark vereinfacht wird. Um die Luminosität auf den von mir verwendeten raumartigen Hyperflächen berechnen zu können, muss die endliche Laufzeit der Neutrinos vom Sternzentrum bis an die Sternoberfläche berücksichtigt werden. Da dieses Verfahren noch nicht implementiert ist, wird die fehlende Übereinstimmung verständlich.

Der Kollaps des rotierenden extrem massereichen Sterns wurde nicht bis zur Entstehung des scheinbaren Horizontes verfolgt, da die abgewandelte Metrik-Methode noch nicht auf dem Vektorcomputer SX-5 lauffähig war, auf dem die Rechnung wegen des großen Rechenaufwands durchgeführt worden ist. Trotzdem lassen sich schon wichtige Schlüsse ziehen: Auch für einen maximal rotierenden extrem massereichen Stern kann Rotation für den Großteil der Sternmaterie keine genügend große Zentrifugalkraft aufbringen um eine Akkretionsscheibe bei großen Radien zu erzeugen. Die Bildung einer Akkretionscheibe bei wenigen Schwarzschildradien kann aber nicht ausgeschlossen werden. Die Verteilung der Masse im Zentrum wird durch die Rotation im Vergleich mit dem sphärischen Kollaps nur unwesentlich verändert. Am Ende der Simulation kollabiert der Stern im Zentrum homolog, wobei die Kollapsgeschwindigkeit einen vergleichbaren Wert annimmt, wie beim sphärischen Kollaps. Weil keine Materie über den Rand das numerische Gitter verlässt, fällt die gesamte Sternmaterie und mit ihr der Drehimpuls auf das sich bildende rotierende Schwarze Loch (Kerr-Loch). Das entstandene Kerr-Loch wird daher schnell rotieren ($a/M \approx 1$). Da für das Verhältnis von kinetischer Rotationsenergie zu gravitativer Bindungsenergie während des Kollapses $T/|W| < 0,27$ gilt, ist die Ausbildung nichtaxialsymmetrischer Deformationen (Balken) nicht möglich.

Ziel zukünftiger Simulationen sollte es sein, diese fortzuführen, bis alle Materie durch das Schwarze Loch akkretiert wurde. Der entwickelte Metrik-Löser könnte hierzu sehr nützlich sein, da eine Steigerung der Auflösung im Zentrum eine weitere Entwicklung des Kollapses möglich macht. Damit wegen der erforderlichen hohen zentralen Auflösung der Rechenzeitverbrauch

nicht zu groß wird, wäre die Einführung eines *mitbewegten Gitters* eine deutliche Verbesserung. Für den Kollaps eines rotierenden extrem massereichen Sterns muss man dabei allerdings beachten, dass für den Endzustand eines Kerr-Lochs die konform flache Näherung nicht mehr gültig ist. Um die Entstehung eines Kerr-Lochs möglichst weit verfolgen zu können, ist das Benutzen der *(CFC+)-Methode* eine denkbare Möglichkeit, bei der Abweichungen von der sphärischen Symmetrie in höherer Ordnung berücksichtigt werden als bei der CFC-Methode.

Anhang A

Hilfsgrößen

A.1 Ableitung einiger Zustandsgrößen

Die Zustandsgleichung $P^{\text{EOS}}(\rho, \epsilon)$ ist eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen. Die zugehörige Kettenregel findet man z.B. in Springers Mathematische Formeln (Kap.10). Demnach gilt für die Differentiation von $f = f(x, y)$ nach $u = u(x, y)$ wobei $v = v(x, y)$ konstant bleibt:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_v = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_v + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_v. \quad (\text{A.1})$$

Angewandt auf die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit c_s ergibt:

$$c_s^2 \equiv \frac{1}{h} \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s = \frac{1}{h} \left\{ \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_\epsilon \left. \frac{\partial \rho}{\partial \rho} \right|_s + \left. \frac{\partial P}{\partial \epsilon} \right|_\rho \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right|_s \right\}. \quad (\text{A.2})$$

Aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik $Tds = d\epsilon + Pd(1/\rho)$ folgt für $ds = 0$:

$$\left. \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right|_s = \frac{P}{\rho^2}. \quad (\text{A.3})$$

Das kann man dann in (A.2) einsetzen und erhält die Form (3.71) für die Schallgeschwindigkeit:

$$c_s^2 \equiv \frac{1}{h} \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s = \frac{1}{h} \left\{ \chi + \kappa \frac{P}{\rho^2} \right\}. \quad (\text{A.4})$$

Für die Größe χ ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel:

$$\chi \equiv \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_\epsilon = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_T \left. \frac{\partial \rho}{\partial \rho} \right|_\epsilon + \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_\rho \left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_\epsilon. \quad (\text{A.5})$$

Aus dem totalen Differential von ϵ

$$d\epsilon = \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right|_T d\rho + \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right|_\rho dT, \quad (\text{A.6})$$

erhält man für $d\epsilon = 0$:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_{\epsilon} = - \frac{\left. \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right|_T}{\left. \frac{\partial T}{\partial \epsilon} \right|_{\rho}}. \quad (\text{A.7})$$

Eingesetzt in (A.5) ergibt die Identität (3.72) für χ . Für κ gilt:

$$\kappa \equiv \left. \frac{\partial P}{\partial \epsilon} \right|_{\rho} = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_T \left. \frac{\partial \rho}{\partial \epsilon} \right|_{\rho} + \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_{\rho} \left. \frac{\partial T}{\partial \epsilon} \right|_{\rho} = \frac{\left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_{\rho}}{\left. \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right|_{\rho}}. \quad (\text{A.8})$$

Eine weitere nützliche Identität ist:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_T + \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_{\rho} \frac{- \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right|_T + \frac{P}{\rho^2}}{\left. \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right|_{\rho}}. \quad (\text{A.9})$$

Damit läßt sich die Schallgeschwindigkeit (A.2) noch auf eine andere Art ausdrücken.

A.2 Ableitungs-Identität

Um die primitiven Variablen aus den erhaltenen Variablen mit einer Newton-Raphson-Iteration zu gewinnen, braucht man die Ableitung der Zustandsgleichung nach dem Druck:

$$\frac{d}{dP} P^{\text{EOS}}(\rho(P), \epsilon(P)) = \left. \frac{\partial P^{\text{EOS}}}{\partial \rho} \right|_{\epsilon} \frac{d\rho}{dP} + \left. \frac{\partial P^{\text{EOS}}}{\partial \epsilon} \right|_{\rho} \frac{d\epsilon}{dP}. \quad (\text{A.10})$$

Aus den Gleichungen (3.75) folgt $d\rho/dP = v_i v^i / h$, was nun eingesetzt wird:

$$\frac{d}{dP} P^{\text{EOS}}(\rho(P), \epsilon(P)) = \left. \frac{\partial P^{\text{EOS}}}{\partial \rho} \right|_{\epsilon} \frac{v_i v^i}{h} + \frac{d\epsilon}{d\rho} \frac{v_i v^i}{h}. \quad (\text{A.11})$$

Für adiabatische Zustandsänderungen ergibt sich aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik $d\epsilon = T dS - P d(1/\rho)$:

$$\frac{d\epsilon}{d\rho} = \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right|_s = \frac{P}{\rho^2}. \quad (\text{A.12})$$

Damit ergibt sich schließlich für die Ableitungsidentität:

$$\frac{d}{dP} P^{\text{EOS}}(\rho(P), \epsilon(P)) = \frac{v_i v^i}{h} \left(\left. \frac{\partial P^{\text{EOS}}}{\partial \rho} \right|_{\epsilon} + \left. \frac{\partial P^{\text{EOS}}}{\partial \epsilon} \right|_{\rho} \frac{P}{\rho^2} \right) = c_s^2 v_i v^i. \quad (\text{A.13})$$

Der Vorteil dieser Identität ist, dass sie für jede Zustandsgleichung der Form $P^{\text{EOS}}(\rho(P), \epsilon(P))$ eingesetzt werden kann.

Literaturverzeichnis

- [1] Arnowitt, R., Deser, S., and Misner, C.W., “The dynamics of general relativity”, in Witten, L., ed., *Gravitation: An introduction to current research*, 227–265, (Wiley, New York, U.S.A., 1962).
- [2] Banyuls, F., Font, J.A., Ibáñez, J.M^a, Martí, J.M^a, and Miralles, J.A., “Numerical $\{3 + 1\}$ general relativistic hydrodynamics: A local characteristic approach”, *Astrophys. J.*, **476**, 221–231, (1997).
- [3] Baumgarte, T.W., and Shapiro, S.L., “Evolution of rotating supermassive stars to the onset of collapse”, *Astrophys. J.*, **526**, 941–952, (1999).
- [4] Baumgarte, T.W., and Shapiro, S.L., “Luminosity versus Rotation in a Supermassive Star”, *Astrophys. J.*, **526**, 937–940, (1999).
- [5] Berger, M., and Olinger, J., *J.Comput.Phys.*, **484**, (1984).
- [6] Bicák, J., *Einstein field equations and their physical implications*, (Springer, Berlin, 2000). gr-qc/0004016.
- [7] Chandrasekhar, S., “The Dynamical Instability of Gaseous Masses Approaching the Schwarzschild Limit in General Relativity”, *Astrophys. J.*, **140**, 417+, (1964).
- [8] Clayton, D.D., *Principles of stellar evolution and nucleosynthesis*, (University of Chicago Press, Chicago, U.S.A., 1983).
- [9] Colella, P., and Woodward, P.R., “The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations”, *J. Comput. Phys.*, **54**, 174–201, (1984).
- [10] Diener, P., private communication.
- [11] Dimmelmeier, H., *General relativistic collapse of rotating stellar cores in axisymmetry*, PhD thesis, (Max-Planck-Institut für Astrophysik, Garching, b. München, D, 2001).
- [12] Dimmelmeier, H., Font, J.A., and Müller, E., “Relativistic simulations of rotational core collapse.– I. Methods, initial models, and code tests”, *Astron./ Astrophys.*, **388**, 917–935, (2002).
- [13] Dimmelmeier, H., Font, J.A., and Müller, E., “Relativistic simulations of rotational core collapse.– II. Collapse dynamics and gravitational radiation”, *Astron./ Astrophys.*, **393**, 523–542, (2002).

- [14] d’Inverno, R., *Einführung in die Relativitätstheorie*, (VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, D, 1995).
- [15] Donat, R., and Marquina, A., “Capturing shock reflections: An improved flux formula”, *J. Comput. Phys.*, **125**, 42–58, (1996).
- [16] Eddington, A.S., *The internal constitution of the stars*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K., 1926).
- [17] Elvis, M., Risalti, G., and Zamorani, G., “Most supermassive black holes must be rapidly rotating”, *Astrophys. J.*, **565**, L75–L77, (2002).
- [18] Fliessbach, T., *Allgemeine Relativitätstheorie*, (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, D, 1995).
- [19] Font, J.A., “Numerical hydrodynamics in general relativity”, *Living Reviews in Relativity*, **3**, (2000). URL: <http://www.livingreviews.org/Articles/Volume3/2000-2font/>.
- [20] Font, J.A., Dimmelmeier, H., Gupta, A., and Stergioulas, N., “Axisymmetric modes of rotating relativistic stars in the Cowling approximation”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **325**, 1463–1470, (2001).
- [21] Fuller, G.M., Woosley, S.E., and Weaver, T.A., “The Evolution of Radiation-Dominated Stars.– I. Nonrotating Supermassive Stars”, *Astrophys. J.*, **307**, 675–686, (1986).
- [22] Godunov, S.K., Zabrodin, A.V., and Prokopov, G.P., “A computational scheme for two-dimensional non stationary problems of gas dynamics and calculation of the flow from a shock wave approaching a stationary state”, *Zh. vych. mat.*, **1**, 1020–1050, (1961).
- [23] Goldreich, P., and Weber, S.V., *Astrophys. J.*, **238**, 991–997, (1980).
- [24] Hachisu, I., “A versatile method for obtaining structures of rapidly rotating stars”, *Astrophys. J.*, **61**, 479–507, (1986).
- [25] Haft, M., Raffelt, G., and Weiss, A., “Standard and Nonstandard Neutrino-Emission Revisited”, *Astrophys. J.*, **425**, 222–230, (1994).
- [26] Hoyle, F., and Fowler, W. A., “On the nature of strong radio sources”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **125**, 169–176, (1963).
- [27] Itoh, N., Adachi, T., Nakagawa, M., Kohyama, Y., and Munakata, H., “Neutrino energy loss in stellar interiors.– III. Pair, photo-, plasma-, and bremsstrahlung-processes”, *Astrophys. J.*, **339**, 354–364, (1989).
- [28] Jackson, J.D., *Klassische Elektrodynamik*, (de Gruyter, Berlin, New York, 1982).
- [29] Kippenhahn, R., and Weigert, A., *Stellar Structure and Evolution*, (Springer, Berlin, Heidelberg, 1990).
- [30] Komatsu, H., Eriguchi, Y., and Hachisu, I., “Rapidly rotating general relativistic stars – I. Numerical method and its application to uniformly rotating polytropes”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **237**, 355–379, (1989).

- [31] Komatsu, H., Eriguchi, Y., and Hachisu, I., “Rapidly rotating general relativistic stars – II. Differentially rotating polytropes”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **239**, 153–171, (1989).
- [32] Kormendy, J., “Supermassive black holes in galactic nuclei”, *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, **10**, 69–78, (2001).
- [33] LeVeque, R.J., “Nonlinear conservation laws and finite volume methods”, in Steiner, O., and Gautschi, A., eds., *Computational methods for astrophysical fluid flow. Saas-Fee Advanced Course 27*, 1–159, (Springer, Berlin, D, 1998).
- [34] Lichnerowicz, A., “L’intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps”, *J. Math. Pures Appl.*, **23**, 37–63, (1944).
- [35] Linke, F., *General relativistic simulation of collapsing supermassive stars*, Diploma thesis, (Technische Universität München, Garching b. München, D, 2000).
- [36] Linke, F., Font, J.A., Janka, H.-T., Müller, E., and Papadopoulos, P., “Spherical collapse of supermassive stars: neutrino emission and gamma-ray bursts”, *Astron. Astrophys.*, **376**, 568–579, (2001).
- [37] Loeb, A., and Rasio, F.A., “Collapse of primordial gas clouds and the formation of quasar black holes”, *Astrophys. J.*, **432**, 52–61, (1994).
- [38] Martí, J.M., and E., Müller, “Numerical hydrodynamics in special relativity”, *Living reviews in relativity*, **1**, URL: www.livingreviews.org, (1999).
- [39] Misner, C.W., Thorne, K.S., and Wheeler, J.A., *Gravitation*, (W.H. Freeman, San Francisco, U.S.A., 1973).
- [40] Müller, E., “Einführung in die Hydrodynamik: Grundlagen und numerische Verfahren”, *Vorlesungsreihe an der Technischen Universität München*, (Sommersemester 2002). URL: <http://www.MPA-Garching.MPG.DE/~ewald/TUM/HYDRO/>.
- [41] Munakata, H., Koyama, Y., and Itoh, N., “Neutrino energy losses in stellar interiors”, *Astrophys. J.*, **296**, 197–203, (1985).
- [42] Nakai, N., Inoe, M., and Miyoshi, M., “Extremely-high-velocity H_2O maser emission in the galaxy NGC 4258”, *Nature*, **361**, 45–47, (1993).
- [43] Rampp, M., Müller, E., and Ruffert, M., “Simulations of non-axisymmetric rotational core collapse”, *Astron. Astrophys.*, **332**, 969–983, (1998).
- [44] Roe, P.L., “Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes”, *J. Comput. Phys.*, **43**, 357–372, (1981).
- [45] Saijo, M., Baumgarte, T.W., Shapiro, S.L., and Shibata, M., “Collapse of a rotating supermassive star to a supermassive black hole: post-newtonian-simulations”, *Astrophys. J.*, **569**, 349–361, (2002).
- [46] Schödel, R., Ott, T., and Genzel, R. et al., “A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre of the Milky Way”, *Nature*, **419**, 694–696, (2002).

- [47] Shapiro, S.L., and Teukolsky, S.A., “Gravitational collapse of supermassive stars to black holes: numerical solution of the einstein equations”, *Astrophys. J.*, **234**, L177–L181, (1979).
- [48] Shapiro, S.L., and Teukolsky, S.A., *Black holes, white dwarfs, and neutron stars*, (Wiley, New York, U.S.A., 1983).
- [49] Shapiro, S.L., and Teukolsky, S.A., “The collapse of dense star clusters to supermassive black holes - The origin of quasars and AGN”, *Astrophys. J.*, **292**, L41–L44, (1985).
- [50] Shibata, M., and Shapiro, S.L., “Collapse of a rotating supermassive star to a supermassive black hole: Fully relativistic simulations”, *Astrophys. J.*, **572**, L39–L43, (2002).
- [51] Siebel, F., Font, J.A., Müller, E., and Papadopoulos, P., “Simulating the dynamics of relativistic stars via a light-cone approach”, *Phys. Rev. D*, **65**, 064038, (2002).
- [52] Wagoner, R.V., “Physics of massive objects”, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **7**, 553–576, (1969).
- [53] Wilson, J.R., Mathews, G.J., and Marronetti, P., “Relativistic numerical model for close neutron-star binaries”, *Phys. Rev. D*, **54**, 1317–1331, (1996).
- [54] York Jr., J.W., “Kinematics and dynamics of general relativity”, in Smarr, L.L., ed., *Sources of gravitational radiation*, 83–126, (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1979).
- [55] Zeldovich, Ya.B., and Novikov, I.D., *Stars in Relativity*, (University of Chicago Press, Chicago and London, 1971).
- [56] Zwerger, T., and Müller, E., “Dynamics and gravitational wave signature of axisymmetric rotational core collapse”, *Astron. Astrophys.*, **320**, 209–227, (1997).

Danksagung

Mein erster Dank geht an meine Eltern, die mich während meines Studiums tatkräftig unterstützt haben. Ohne ihre Hilfe wäre mir das Studium erheblich schwerer gefallen. Danken möchte ich auch meinem Betreuer Ewald Müller, der immer Zeit für numerische und nicht numerische Probleme meiner Arbeit hatte. Meinem Zweitbetreuer Thomas Janka danke für lebhaftes Diskussionen und Interpretation meiner Ergebnisse. Harald Dimmelmeier danke ich für das Bereitstellen und ausführliche Erklären seines Hydrodynamikprogrammes und für die viele weitere Betreuung. Ansonsten geht mein Dank noch an

- Toni Font, der bei einem kurzen Besuch lebhaftes Interesse an meiner Arbeit zeigte.
- Alle Mitglieder der Hydrogruppe für die vielen Gespräche bei den Gruppentreffen und sonstigen Hilfestellungen, insbesondere an Florian, Tobias, Leonhard, Burkhard und Miguel-Angel.
- Meinen Vorgänger Felix Linke, der mir einige Tips gab und seiner Programm-Routinen zur Verfügung stellte.
- Die Mitdiplomanden in meinem Büro Almudena, Christoph und Thomas, die stets eine angenehme Arbeitsatmosphäre möglich machten.
- Schließlich an das MPA für die Arbeitsausstattung und auch für Kaffee, Kakao und Tee.